



# Problemas de Contorno Unidimensionales

## TRABAJO FINAL DE GRADO

Grado en Ingeniería Mecánica



**Autora:** Olga Movilla

**Directora:** Ángeles Carmona

**Co-Director:** Andrés M. Encinas

**Convocatoria:** Junio 2018



## *Resumen*

El concepto de función de Green está intrínsecamente ligado a la resolución de problemas de la Física-Matemática y de la Ingeniería gobernados por ecuaciones diferenciales, tanto unidimensionales como multidimensionales y en ámbitos dinámicos que matemáticamente se formulan como Problemas de Valor Inicial, como estáticos, modelados como Problemas de Contorno. En resumidas cuentas, la función de Green se corresponde a la respuesta de los sistemas físicos ante acciones concentradas, de manera que para problemas lineales, su conocimiento permite obtener la respuesta ante acciones distribuidas.

Dado un problema regular, la función de Green es única, depende exclusivamente de las características físicas del sistema y su conocimiento permite obtener tales parámetros; de manera que no sólo es útil en los denominados problemas directos, es decir, para la obtención de la respuesta ante acciones externas; sino también en los denominados problemas inversos, que pretenden identificar las características del sistema físico a partir de su comportamiento ante determinadas excitaciones.

Por otro lado, dado un problema de contorno autoadjunto, su tratamiento variacional nos ofrece una comprensión más profunda del sistema físico que modela; esto es, nos permite interpretar el problema desde el punto de vista energético. De esta manera, sus soluciones son precisamente aquellas que minimizan el funcional de energía asociado a dicho sistema, o lo que es lo mismo, el sistema tiende a un estado de equilibrio en el que su energía es mínima.

En este trabajo proponemos una presentación de las herramientas matemáticas que permiten introducir tanto el concepto de función de Green como el tratamiento variacional de los problemas de contorno. Ambos nos servirán para describir explícitamente algunos problemas relevantes en la Ingeniería, más concretamente en la Mecánica, cuya resolución puede explicarse en términos variacionales y realizarse a través de la función de Green.

## *Resum*

El concepte de funció de Green està intrínsecament lligat a la resolució dels problemes de la Física-Matemàtica i de l'Enginyeria governats per equacions diferencials, tant unidimensionals com multidimensionals i en àmbits dinàmics que matemàticament es formulen com Problemes de Valor Inicial, com estàtics, modelats com Problemes de Contorn. Resumint, la funció de Green correspon a la resposta dels sistemes físics davant d'accions concentrades, de manera que per problemes lineals, el seu coneixement permet obtindre la resposta davant d'accions distribuïdes.

Donat un problema regular, la funció de Green és única, depèn exclusivament de les característiques físiques del sistema i el seu coneixement permet obtenir tals paràmetres; de manera que no només és útil en els denominats problemes directes, és a dir, per obtenir la resposta davant d'accions externes; sinó també en els denominats problemes inversos, que pretenen identificar les característiques del sistema físic a partir del seu comportament davant de determinades excitacions.

D'altra banda, donat un problema de contorn autoadjunt, el seu tractament variacional ens ofereix una comprensió més profunda del sistema físic que modela; és a dir, ens permet interpretar el problema des del punt de vista energètic. D'aquesta manera, les seves solucions són precisament aquelles que minimitzen el funcional d'energia associat a tal sistema, o equivalentment, el sistema tendeix a un estat d'equilibri en el que la seva energia és mínima.

En aquest treball proposem una presentació de les eines matemàtiques que permeten introduir tant el concepte de funció de Green com el tractament variacional dels problemes de contorn. Ambdós ens serviran per descriure explícitament alguns problemes rellevants en l'Enginyeria, més concretament en la Mecànica, la resolució dels quals es pot explicar amb termes variacionals i realitzar-se a través de la funció de Green.

## *Abstract*

The Green's function is intrinsically linked to the resolution of problems in the Mathematical Physics and Engineering governed by differential equations, either one-dimensional or multi-dimensional ones and regarding both dynamics, in which case they are mathematically modeled as Initial Value Problems; and statics, represented by Boundary Value Problems. Basically, the Green's function corresponds to the impulse response of the physical systems, so that, if the problem is linear, their knowledge enables obtaining the response to distributed actions.

Given a regular problem, the Green's function is unique, depends exclusively on the physical characteristics of the system and its knowledge makes possible the recovery of the parameters that define the system. In that way, not only is it useful in the direct problems, this is, to obtain the response to external actions; but also in the so-called inverse problems, that attempt to identify the characteristics of the physical system from their response to certain actions.

On the other hand, given an adjoint boundary value problem, its variational treatment provides us a deeper understanding of the modeled physical system; i.e. it enables us to interpret the problem from the energetic point of view. Thus, its solutions are precisely those that minimize the energy functional associated to the system, in other words, the system tends to an state of equilibrium in which its total energy is minimum.

In this project we put forward a presentation of the mathematical tools that allow introducing the concept of the Green's function, as well as the variational interpretation of boundary value problems. Both will be used to explicitly describe some Engineering-relevant problems, whose resolution can be explained in variational terms and carried through applying the Green's function.



---

## ***Agradecimientos***

*Quiero agradecer a Ángeles y a Andrés todas las horas dedicadas, la paciencia que han mostrado y el conocimiento que han compartido. Y sobretodo, gracias por lo mucho que he aprendido.*





# Índice general

<b>1. Introducción y preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Resolución de sistemas lineales. Formas bilineales y cuadráticas . . . . .	2
1.1.1. Formas bilineales y cuadráticas . . . . .	3
1.2. Métodos variacionales y sistemas lineales . . . . .	5
1.2.1. Objeto del cálculo de variaciones . . . . .	5
1.2.2. Minimización de funcionales cuadráticos . . . . .	5
1.3. Acciones concentradas y Delta de Dirac . . . . .	7
1.4. Lema fundamental del cálculo de variaciones . . . . .	9
1.5. Funciones seccionalmente continuas y derivables . . . . .	10
1.6. Desigualdades de Energía . . . . .	12
<b>2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Problema de Valores Iniciales</b>	<b>17</b>
2.1. Problema de Valores Iniciales . . . . .	17
2.2. Cuestiones previas . . . . .	18
2.2.1. Reducción a un sistema de primer orden . . . . .	18
2.2.2. Existencia y unicidad de soluciones . . . . .	19
2.3. Teoría general del PVI . . . . .	20
2.4. La Función de Green del PVI . . . . .	24
2.4.1. Función de Green en el Problema Inverso . . . . .	26

2.4.2. La Función de Green como la respuesta ante una perturbación puntual . . . . .	27
2.4.3. Función de Green como operador inverso . . . . .	28
2.5. Ecuaciones con coeficientes constantes . . . . .	29
2.5.1. Ecuaciones de segundo orden . . . . .	31
2.5.2. Ecuaciones de cuarto orden . . . . .	33
<b>3. Teoría general de los Problemas de Contorno</b>	<b>43</b>
3.1. Teoría General . . . . .	43
3.2. Tratamiento variacional del Problema de Contorno Autoadjunto . . . . .	47
3.3. Función de Green en el Problema de Contorno Regular . . . . .	49
3.3.1. Operador de Green de un Problema de Contorno . . . . .	50
<b>4. Problema de Contorno regular de segundo orden</b>	<b>53</b>
4.1. Condiciones de Contorno . . . . .	53
4.2. Problema Sturm-Liouville . . . . .	55
4.3. Tratamiento variacional del Problema Autoadjunto . . . . .	58
4.4. Función de Green de un problema de segundo orden regular . . . . .	60
4.5. Función de Green de un problema de Sturm-Liouville . . . . .	62
4.6. Aplicaciones: flexiones longitudinales en barras . . . . .	64
4.6.1. Ecuación Diferencial . . . . .	64
4.6.2. Condiciones de Contorno . . . . .	65
4.6.3. Resolución del Problema de Sturm-Liouville general . . . . .	66
4.6.4. Resolución del problema con Condiciones no Homogéneas . . . . .	71
4.6.5. Tratamiento variacional . . . . .	73
<b>5. Problema de Contorno regular de cuarto orden</b>	<b>75</b>
5.1. Condiciones de Contorno . . . . .	75

5.2. Problema de cuarto orden autoadjunto . . . . .	77
5.3. Tratamiento variacional del Problema Autoadjunto . . . . .	79
5.4. Función de Green de un problema de cuarto orden regular . . . . .	81
5.5. Función de Green de un problema con condiciones separadas . . . . .	83
5.6. Aplicaciones: flexiones transversales en vigas . . . . .	85
5.6.1. Ecuación Diferencial . . . . .	85
5.6.2. Condiciones de Contorno . . . . .	87
5.6.3. Resolución del problema con condiciones separadas . . . . .	89
5.6.4. Tratamiento variacional . . . . .	98
<b>6. Análisis del impacto ambiental</b>	<b>101</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>103</b>
<b>Análisis económico</b>	<b>105</b>
6.0.1. Costes de Ingeniería . . . . .	105
6.0.2. Licencias . . . . .	105
<b>Bibliografía</b>	<b>107</b>



# Capítulo 1

## Introducción y preliminares

Las ecuaciones diferenciales ordinarias gobiernan gran variedad de problemas en la Ingeniería. Si éstas son lineales, es posible resolver dichos problemas a través del concepto de Función de Green, ya se traten de Problemas de Valor Inicial o de Contorno.

Dentro de los Problemas de Contorno lineales y dada su complejidad, nos tendremos que limitar a aquéllos unidimensionales. Para ser más concretos, trataremos de resolver aquéllos regulares y autoadjuntos de segundo y cuarto orden, con condiciones separadas. A primera vista, estas restricciones nos pueden parecer demasiadas. Sin embargo, como veremos más adelante, no sólo son este tipo de problemas unidimensionales los más sencillos de interpretar, sino que también resultan los de mayor relevancia física.

Nos centraremos tanto en la función de Green de dichos problemas, como en su tratamiento variacional, dado que ambos conceptos están intrínsecamente ligados a las características y la naturaleza de los sistemas físicos que trataremos de describir. De esta forma, seremos capaces de obtener una mayor comprensión de las soluciones obtenidas y de las condiciones bajo las cuales éstas existen o son únicas.

Finalmente, mostraremos de manera explícita algunas de las muchas aplicaciones de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para ser más precisos, éstas estarán relacionadas con el cálculo de estructuras y gracias a ellas veremos cuánto nos permitirá profundizar el estudio teórico realizado.

Sin embargo, antes de entrar en materia, será necesario tener conocimiento de algunos conceptos básicos con los que trataremos a continuación.

## 1.1. Resolución de sistemas lineales. Formas bilineales y cuadráticas

Llamaremos *sistema de  $n$  ecuaciones lineales* al dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n, \end{aligned}$$

de forma que, mediante los coeficientes  $a_{ik}$ , asigna un único conjunto de elementos  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  a cada conjunto de elementos  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

Podemos reescribir nuestro sistema lineal como

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = y_i, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

donde  $a_{ik}$  son los coeficientes asociados al sistema. Si existe solución al sistema, se cumple que, o bien existe únicamente un  $x \in \mathbb{R}^n$  para cada  $y \in \mathbb{R}^n$ , y, en particular,  $x = 0$  para  $y = 0$ , por lo que se tratará de un sistema compatible determinado; o bien para las ecuaciones homogéneas, esto es, para  $y = 0$ , tenemos un número positivo  $p$  de soluciones no triviales que son linealmente independientes entre sí  $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$ , dando lugar a un sistema compatible indeterminado. También puede suceder que no exista solución, en cuyo caso estaríamos tratando con un sistema incompatible.

En el segundo de estos casos, el sistema homogéneo transpuesto, que está dado por

$$\sum_{k=1}^n a'_{ik}x'_k = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

donde  $a'_{ik} = a_{ki}$ , también tiene exactamente  $p$  soluciones no triviales linealmente independientes  $x'_1, x'_2, \dots, x'_p \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, el sistema no homogéneo sólo tiene solución para aquellos vectores  $y$  ortogonales a las soluciones al sistema homogéneo transpuesto  $x'_1, x'_2, \dots, x'_p$ . Además sabemos que dos soluciones al mismo sistema no homogéneo difieren en una solución arbitraria al sistema homogéneo.

El sistema de ecuaciones (1.1) también puede expresarse en forma matricial. De esta forma, tenemos

$$Ax = y,$$

donde  $A = (a_{ik})$ . Expresado de esta manera podemos entender que invertir la matriz  $A$  es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones lineales para cualquier  $y$ . Esto sólo es posible si  $\det A \neq 0$ , en cuyo caso, la solución está unívocamente determinada por la aplicación lineal

$$x_i = \sum_{k=1}^n \check{a}_{ik}y_k, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

con  $\check{a}_{ik} = \frac{A_{ki}}{A}$ , donde  $A_{ki}$  es el cofactor del elemento  $a_{ki}$ . Llamaremos, por tanto, *matriz inversa de A* a la dada por  $A^{-1} = (\check{a}_{ik})$ , que se distingue por tener la propiedad de elemento simétrico, es decir,  $AA^{-1} = A^{-1}A = Id$ ; y cuyo determinante viene dado por  $(\det A)^{-1}$ . De esta forma, la solución a un sistema lineal de ecuaciones cuya matriz  $A$  tiene un determinante no nulo, se caracteriza por la matriz  $A^{-1}$  descrita anteriormente.

Observemos que  $A$  puede interpretarse como la matriz asociada a una aplicación lineal, que denotaremos por  $f$ , en bases canónicas. En este caso, se trata de una aplicación lineal de  $\mathbb{R}^n$ , donde hemos considerado el producto interno estándar, esto es,  $\langle, \rangle$  dado por  $\langle x, y \rangle = \langle y, x^T \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ . Sin embargo, bien podríamos estar trabajando en un espacio vectorial de dimensión infinita, como son los espacios de funciones.

De esta forma, podemos reescribir el estudio que acabamos de realizar del sistema lineal, esta vez en otros términos. Consideremos  $f$  una aplicación lineal que parte de un espacio vectorial de dimensión  $n \in \mathbb{N}$  y por tanto cumple

$$n = \dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f).$$

Entonces, cuanto mayor sea el espacio vectorial  $\text{Ker}(f)$ , es decir, el formado por las soluciones al sistema homogéneo; menor será  $\text{Im}(f)$ , esto es, menor será el conjunto de vectores  $y$  para los cuales el sistema tiene solución.

Asimismo, afirmar que el sistema no homogéneo sólo tiene solución para aquellos vectores  $y$  ortogonales a las soluciones al sistema homogéneo transpuesto, es equivalente a expresar  $\text{Im}A = [\text{ker}A^T]^\perp$ , que puede explicarse teniendo en cuenta la definición del producto interno. Sea  $z$  una solución al sistema homogéneo transpuesto tal que  $A^T z = 0$ , entonces  $\langle A^T z, x \rangle = \langle Ax, z \rangle = \langle y, z \rangle = 0$ , por lo que  $y$  ha de ser ortogonal a  $z$ .

Además, tenemos que la aplicación lineal  $f$  es sobreyectiva si el sistema lineal al que está asociada tiene solución para todo  $y$ . Por otro lado, diremos que es inyectiva si el sistema homogéneo asociado tiene como única solución la trivial. Finalmente, si ambas condiciones se cumplen, la aplicación es biyectiva y tenemos que para todo  $y$  existe una única solución al sistema de ecuaciones lineales.

En realidad, cuando la matriz es cuadrada, unicidad implica existencia para todo segundo miembro y recíprocamente existencia para todo segundo miembro implica la unicidad. En otras palabras, para sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, inyectividad y sobreyectividad son equivalentes entre sí, por lo que también son equivalentes a la biyectividad.

### 1.1.1. Formas bilineales y cuadráticas

Para escribir las ecuaciones lineales de (1.1) de forma concisa, podemos utilizar una *aplicación bilineal*, esto es, aquélla que satisface  $a(\alpha x_1 + \beta x_2, \gamma y_1 + \delta y_2) = \alpha \gamma a(x_1, y_1) + \alpha \delta a(x_1, y_2) + \beta \gamma a(x_2, y_1) + \beta \delta a(x_2, y_2)$ . La *forma bilineal* correspondiente a la matriz  $A$  se obtiene multiplicando el término izquierdo de (1.1) por cantidades indeterminadas



$u_1, u_2, \dots, u_n$  y haciendo el sumatorio, y está dada por

$$a(u, x) = \langle Ax, u \rangle = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_i x_k.$$

Dada la definición del producto escalar, obtenemos que  $\langle Ax, u \rangle = \langle x, A^T u \rangle$ .

Por lo tanto, ahora podemos expresar nuestro sistema lineal mediante una única ecuación válida para todo  $u \in \mathbb{R}^n$ :

$$a(u, x) = e(u, y),$$

donde  $e(u, y) = \sum_{i=1}^n u_i y_i$  es la forma bilineal correspondiente a la matriz identidad.

En particular, la forma bilineal inversa  $a^{-1}(u, x)$  es la dada por la matriz  $A^{-1}$  y puede escribirse como  $a^{-1}(u, x) = -\frac{\text{deta}(u, x)}{\det A}$ , donde

$$\text{deta}(u, x) = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \cdots & u_n \\ x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \sum_{i,k=1}^n A_{ik} x_i u_k,$$

siendo de nuevo  $A_{ik}$  el cofactor del elemento  $a_{ik}$ .

Las aplicaciones lineales simétricas, es decir, las que satisfacen  $a_{ik} = a_{ki}$ , son de especial interés. Dadas sus características, se pueden estudiar considerando tan sólo su *forma cuadrática*. La forma cuadrática se obtiene a partir de la forma bilineal, mediante la sustitución de  $u_i$  por  $x_i$ , de forma que

$$a(x, x) = q(x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k$$

es la forma cuadrática de  $a(u, x)$ .

Sin embargo, si  $a(u, x)$  no fuera simétrica y la expresáramos mediante su forma cuadrática, estaríamos perdiendo parte de la información. De hecho, a partir de una forma cuadrática  $q(x)$  podemos obtener una forma bilineal, pero ésta siempre será simétrica:

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_i x_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n u_i \frac{\delta a(x, x)}{\delta x_i} = \frac{a(x+u, x+u) - a(x, x) - a(u, u)}{2}.$$

Llamaremos al último término de la igualdad anterior la *forma polar* correspondiente a la forma cuadrática  $a(x, x)$ .

Además, si  $A$  es una matriz simétrica, es definida *positiva* cuando no sólo cumple que  $\langle Ax, x \rangle \geq 0 \forall x$ , sino también satisface que si  $\langle Ax, x \rangle = 0$ , entonces  $x = 0$ . Por lo tanto, diremos que una aplicación bilineal es positiva si su matriz lo es. Queda claro que esto implica que una aplicación bilineal es definida positiva sii  $q(x) \geq 0$ .



## 1.2. Métodos variacionales y sistemas lineales

### 1.2.1. Objeto del cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones se basa en la búsqueda de los mínimos o máximos de unos objetos llamados funcionales. Entendemos por *funcional* una función que, en vez de depender de un número discreto de variables, lo hace de una o varias funciones, a las que llamaremos *funciones argumento*. Es por ello, que el dominio de un funcional es un conjunto de funciones admisibles -al que, por tanto, pertenecerá nuestra función argumento-, y no una región de un espacio de coordenadas. Dado que estos espacios vectoriales son de dimensión infinita, un funcional no podrá ser expresado en función de un número finito de variables.

Nuestro objetivo será, por tanto, encontrar las funciones argumento pertenecientes a un dominio dado, para las cuales el funcional asume un valor máximo o mínimo. Este valor no tiene por qué ser absoluto, sino simplemente un extremo con respecto a funciones argumento en el entorno de la función argumento extremal, es decir, entorno a aquélla que hace que el funcional sea máximo o mínimo. Diremos que una función  $f_1$  yace dentro de la vecindad -dada por  $h$ - de una función  $f$  si  $|f - f_1| < h$  para cualquier elemento del dominio de definición.

Dicho esto, el problema fundamental del cálculo de variaciones trata de, dado un dominio de funciones argumento admisibles, hallar una -o varias- de éstas que constituya un extremo con respecto a todas las funciones argumento del dominio que yacen en su vecindad  $h$ , donde  $h$  es lo suficientemente pequeña.

Si bien sabemos por el teorema de Weierstrass que toda función continua en un dominio compacto posee un valor máximo y otro mínimo en dicho dominio; en el caso de los funcionales no podemos afirmar lo mismo, un problema bien formulado puede no tener soluciones, o dicho de otro modo, no podemos afirmar la existencia de un extremo en cualquier problema; como comprobaremos al hacer el tratamiento variacional de nuestros Problemas de Contorno. Para lograr este objetivo, nos centraremos en la minimización de funcionales cuadráticos.

Para el desarrollo de los anteriores apartados hemos obtenido la información a partir de [1].

### 1.2.2. Minimización de funcionales cuadráticos

En esta sección nos ocuparemos del problema de minimización de funcionales cuadráticos sobre subespacios vectoriales. Hemos seguido los tratamientos de [2], [3] y [4], aunque le hemos despojado de toda carga de análisis funcional, en este caso de espacios de Hilbert, y nos hemos ceñido al tratamiento algebraico. La razón es que, si bien el aparato de espacios de Hilbert es necesario para asegurar la existencia de mínimo, en

problemas unidimensionales basta apelar a los teoremas clásicos de existencia de solución de EDO, en este caso lineales.

Sea  $V$  un espacio vectorial real dotado con un producto interno. Denotemos por  $b$  una aplicación bilineal de la forma  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  y  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  su forma cuadrática. Asumamos que  $b$  es simétrica, por lo que toda su información está contenida en  $q$ . Consideremos la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* en este espacio vectorial que afirma que  $b(w, v)^2 \leq q(w)q(v)$ . Tomemos la aplicación lineal  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  y consideremos el funcional cuadrático

$$\begin{aligned} J : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\rightarrow J(z) = q(z) - 2l(z). \end{aligned}$$

Nuestro problema tratará de calcular

$$\min\{J(z) : z \in K\},$$

donde  $K$  es un espacio afín<sup>1</sup> a  $V_0$ , es decir,  $K = u_0 + V_0$  con  $u_0 \in V$  y  $V_0$  subespacio vectorial. En la terminología clásica del cálculo de variaciones,  $K$  se suele denominar espacio de variaciones admisibles y a  $V_0$  se le denomina espacio de variaciones virtuales. Por lo tanto buscaremos, entre todos los elementos de  $K$ , el que hace mínimo el funcional  $J$ . Asumiremos además que  $q(v) \geq 0$  para todo  $v \in V_0$ .

Teniendo en cuenta que la forma cuadrática cumple, por definición, no sólo que  $q(tv) = t^2 q(v) \forall t \in \mathbb{R}$ , sino también que  $q(u + v) = q(u) + q(v) + 2b(u, v)$ ; dada la expresión en forma polar y considerando  $v \in V_0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} J(u_0 + tv) &= q(u_0 + tv) - 2l(u_0 + tv) = q(u_0) + t^2 q(v) + 2tb(u_0, v) - 2l(u_0) - 2tl(v) \\ &= J(u_0) + t^2 q(v) + 2t(b(u_0, v) - l(v)). \end{aligned}$$

Hemos convertido nuestro funcional  $J(z)$  en una función de variable  $t$  que denotaremos por  $\phi(t)$ . Si  $t$  es lo suficientemente pequeño, todas las funciones  $u_0 + tv$  yacen en un entorno arbitrariamente pequeño de la función  $u_0$ . Observemos además que esta expresión nos define una parábola. De hecho, si  $q(v) < 0$ , entonces esta parábola no presenta un mínimo. De ahí que sea necesario suponer que  $q(v) \geq 0$  para toda  $v \in V_0$ .

Si suponemos ahora que  $u = u_0$  es un mínimo. Entonces necesariamente  $\phi'(t) = 0$  cuando  $t = 0$ , o lo que es lo mismo,  $2tq(v) + 2(b(u_0, v) - l(v)) = 0$  con  $t = 0$ , es decir,  $2(b(u_0, v) - l(v)) = 0$ .

---

<sup>1</sup>Dado un conjunto no vacío  $E$  diremos que es un espacio afín asociado al espacio vectorial  $F$  si se tiene una aplicación  $\gamma$  definida como

$$\begin{aligned} \gamma : E \times E &\rightarrow F \\ (x, y) &\mapsto \gamma(x, y) \end{aligned}$$

tal que, fijado un punto  $\gamma(x)$ , es biyectiva y se cumple que  $\forall x, y, z \in E$ ,  $\gamma(x, z) = \gamma(x, y) + \gamma(y, z)$ .

<sup>2</sup> $q(tv) = b(tv, tv) = tb(v, tv) = t^2 b(v, v) = t^2 q(v)$ .

En consecuencia, para que una función  $u \in K$  sea un mínimo del funcional  $J$ , es condición necesaria que

$$b(u, v) - l(v) = 0 \quad \forall v \in V_0. \quad (1.2)$$

A continuación demostraremos que lo mismo se cumple en sentido opuesto, es decir, que si  $u$  satisface  $b(u, v) = l(v)$  para toda  $v \in V_0$ , entonces es un mínimo de  $J$ .

Desarrollando esta vez  $J(u + v)$  obtenemos  $J(u + v) = q(u + v) - 2l(u + v) = q(u) + q(v) + 2b(u, v) - 2l(u) - 2l(v)$ . Por lo tanto, mediante

$$J(u + v) = J(u) + \underbrace{q(v)}_{\geq 0} + 2 \underbrace{(b(u, v) - l(v))}_0$$

demostramos que si  $u$  satisface (1.2),  $J(u + v)$  siempre será mayor o igual a  $J(u)$ , por lo que  $u$  ha de ser necesariamente un mínimo.

Observemos que si bien  $u$  ha de ser mínimo, éste no es estricto. Si  $q(v) = 0$ , entonces  $J(u + v)$  es mínimo para todo  $v \in V_0$ . Es decir, si tenemos un elemento  $v^*$  al que llamaremos *isótropo* por cumplir  $q(v^*) = 0$ , y  $u$  es un mínimo, entonces podremos obtener tantos mínimos distintos de  $u$  como queramos. Éstos serán de la forma  $u + \alpha v^*$ , donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Es más, si tenemos en cuenta la desigualdad de Cauchy-Schwarz, entonces  $q(v^*) = 0$  sii  $b(w, v^*) = 0$  para todo  $w, v^* \in V_0$ . Por lo tanto, como  $b(u, v^*) = l(v^*)$  y  $u = u_0 + v_0$ , entonces  $b(u_0, v^*) + b(v_0, v^*) = l(v^*)$ . Si  $v^*$  es un elemento isótropo, entonces  $b(v_0, v^*) = 0$ , por lo que  $b(u_0, v^*) = l(v^*)$  para todo elemento isótropo. En particular, si  $u_0 = 0$ , necesariamente se ha de cumplir que  $l(v^*) = 0$  para todo elemento isótropo.

En resumen, para que el problema de minimización tenga sentido, es necesario que  $q$  sea mayor o igual a 0 en  $V_0$ . En este caso, una condición necesaria y suficiente para la existencia de mínimo es la denominada Identidad de Euler del funcional (1.2). En particular esta identidad determina que para que exista mínimo el funcional lineal ha de anularse en cada isótropo del funcional cuadrático y muestra que en caso de existir isótopos no triviales el mínimo no puede ser único.

### 1.3. Acciones concentradas y Delta de Dirac

Una acción concentrada en un punto es algo físicamente muy intuitivo, algo a lo que estamos muy acostumbrados, y que, sin embargo, resulta ser bastante complejo de modelar matemáticamente.

Una acción puede ser concentrada tanto en el espacio, como en el tiempo. Si, por ejemplo, aplicamos una fuerza  $F$  sobre un cuerpo tan sólo en el instante  $t_0$ , esto es, una fuerza instantánea; tendremos, gracias a la segunda ley de Newton, que  $F(t) = a(t)$



donde  $a$  es su aceleración y está dada por

$$a(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq t_0, \\ \infty, & \text{si } t = t_0. \end{cases}$$

Como vemos,  $a(t)$  no puede tratarse de una función.

Obtenemos el mismo resultado si consideramos una acción concentrada en un punto del espacio infinitamente pequeño. Supongamos que  $p(x)$  se trata de una carga de  $1N$  distribuída a lo largo de una superficie de  $1m$ . Al principio la carga por unidad de superficie es de  $1\frac{N}{m}$ , sin embargo, a medida que vamos haciendo pequeña dicha superficie, la carga por unidad de superficie irá aumentando para que la carga total siga siendo de  $1N$ . Si llevamos esta situación a su límite, y concentramos toda la carga en un punto  $x_0$ , obtenemos que

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq x_0, \\ \infty, & \text{si } x = x_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Para dar cuenta de estas situaciones físicas surge el concepto de *distribuciones*, dentro de las cuales destaca la *Delta de Dirac*, que se define, precisamente como

$$\delta_{t_0} = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq t_0, \\ \infty, & \text{si } t = t_0. \end{cases}$$

De nuevo, vuelve a ser claro que no existe una función clásica con estas características. Sin embargo, podemos definir una distribución como el límite de una serie de funciones clásicas a la que denotaremos por  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Estas series de funciones deberán ser continuas en  $\mathbb{R}$ , estrictamente positivas dentro del intervalo  $(t_0 - \varepsilon_n, t_0 + \varepsilon_n)$  y cero fuera de él, teniendo en cuenta que  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una serie de números reales que tiende a cero. Se tratan, entonces, de funciones con soporte compacto<sup>3</sup>. Por último, todas las funciones de la serie deberán cumplir que su integral es 1, es decir,  $\int_{t_0 - \varepsilon_n}^{t_0 + \varepsilon_n} \psi_n(s) ds = \int_{\mathbb{R}} \psi_n(s) ds = 1$ .

De esta forma, para toda  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  que cumpla las condiciones anteriores, si  $n$  tiende a infinito, también lo hace  $\max\{\psi_n(t) : t \in \mathbb{R}\}$ . Además, vamos a probar que todas estas series de funciones también satisfacen que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n(s) f(s) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0 - \varepsilon_n}^{t_0 + \varepsilon_n} \psi_n(s) f(s) ds = f(t_0), \quad (1.4)$$

donde  $f$  es una función continua en el intervalo de estudio. Antes de nada, observemos que (1.4) trata, precisamente, del equivalente matemático al límite del ejemplo (1.3), esto es, el límite de una acción distribuída  $f(t)$  en un intervalo que cada vez es más pequeño.

---

<sup>3</sup>Cerrado y acotado.

Si desarrollamos la anterior igualdad obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_0-\varepsilon_n}^{t_0+\varepsilon_n} \psi_n(s)f(s)ds - f(t_0) &= \int_{t_0-\varepsilon_n}^{t_0+\varepsilon_n} \psi_n(s)f(s)ds - f(t_0) \underbrace{\int_{t_0-\varepsilon_n}^{t_0+\varepsilon_n} \psi_n(s)ds}_1 \\ &= \int_{t_0-\varepsilon_n}^{t_0+\varepsilon_n} \psi_n(s)f(s)ds - \int_{t_0-\varepsilon_n}^{t_0+\varepsilon_n} \psi_n(s)f(t_0)ds = \int_{t_0-\varepsilon_n}^{t_0+\varepsilon_n} (f(s) - f(t_0))\psi_n(s)ds. \end{aligned}$$

Tomando el valor absoluto en la primera y última expresiones, tenemos que

$$\left| \int_{t_0-\varepsilon_n}^{t_0+\varepsilon_n} \psi_n(s)f(s)ds - f(t_0) \right| \leq \int_{t_0-\varepsilon_n}^{t_0+\varepsilon_n} |f(s) - f(t_0)|\psi_n(s)ds.$$

Como  $f$  es una función continua y en particular en  $t_0$ , fijado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $|s - t_0| \leq \delta$ , entonces,  $|f(s) - f(t_0)| \leq \epsilon$ . Ahora podemos afirmar

$$\left| \int_{t_0-\varepsilon_n}^{t_0+\varepsilon_n} \psi_n(s)f(s)ds - f(t_0) \right| \leq \epsilon \int_{t_0-\varepsilon_n}^{t_0+\varepsilon_n} \psi_n(s)ds,$$

es decir, si  $n \rightarrow \infty$ , la diferencia entre  $\int_{t_0-\varepsilon_n}^{t_0+\varepsilon_n} \psi_n(s)f(s)ds$  y  $f(t_0)$  puede ser tan pequeña como queramos, tal y como queríamos demostrar.

Por otro lado, debemos tener en cuenta que podemos escoger estas series de funciones tan regulares como deseemos, siempre y cuando se cumplan las condiciones mencionadas. Por ejemplo, escojamos,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\psi(t) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} e^{1/(t^2-\varepsilon_n^2)} ds} \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [-\varepsilon_n, \varepsilon_n] \\ e^{1/(t^2-\varepsilon_n^2)} & \text{si } t \in [-\varepsilon_n, \varepsilon_n]. \end{cases} \quad (1.5)$$

Observemos que en efecto se trata de una función continua en  $\mathbb{R}$ , estrictamente positiva en el intervalo  $[-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$  y cero fuera de él. Es más, al ser de la familia de las exponenciales, se trata también de una función infinitamente diferenciable.

## 1.4. Lema fundamental del cálculo de variaciones

Para poder definir la función de Green deberemos tener en cuenta el *lema fundamental del cálculo de variaciones*. Éste afirma que si  $\int_0^l f\psi = 0$  con  $f$  una función continua y  $\psi \in \mathcal{C}_C^\infty$  es cualquier función auxiliar de soporte compacto, entonces  $f = 0$ . Equivalentemente, si tenemos dos funciones continuas  $g$  y  $f$

$$\int_0^l f\psi = \int_0^l g\psi, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_C^\infty \quad \implies f = g.$$

De forma análoga a como procederíamos si estuviéramos trabajando con un espacio vectorial de dimensión finita, estamos comparando, mediante el producto escalar, dos

funciones  $f$  y  $\psi$ . Podemos entender las funciones  $\mathcal{C}_C^\infty$  como una base del espacio de funciones con la que obtenemos las coordenadas que nos definen  $f$ . De esta forma, que todas las coordenadas de dos funciones en una misma base coincidan, implica que ambas funciones son idénticas.

Esta propiedad es fácil de demostrar a partir de la definición de Delta de Dirac. Dado que  $\int_0^l f\psi = 0$  se cumple para cualquier  $\psi \in \mathcal{C}_C^\infty$ , en particular lo hace para  $\delta_{t_0}$ , con  $t_0 \in \mathbb{R}$ , siempre y cuando  $\delta_{t_0}$  esté definida mediante una serie de funciones  $\mathcal{C}_C^\infty$  como (1.5). Entonces, teniendo en cuenta (1.4),  $\int_0^l f\delta_{t_0} = \int_{\mathbb{R}} f\delta_{t_0} = f(t_0) = 0 \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$ , y obtenemos que necesariamente  $f = 0$ .

## 1.5. Funciones seccionalmente continuas y derivables

Más adelante encontraremos que la función de Green pertenece a las funciones seccionalmente derivables, razón por la cual consideramos conveniente exponer algunas propiedades de este tipo de funciones. Dado un intervalo cerrado  $[a, b]$  denotaremos por  $\mathcal{C}_s([a, b])$  al espacio de funciones *continuas a trozos en  $[a, b]$* , o *funciones seccionalmente continuas*; es decir,  $u \in \mathcal{C}_s([a, b])$  si existen  $n \in \mathbb{N}^*$  y  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tales que  $u \in \mathcal{C}([t_k, t_{k+1}])$ , para todo  $k = 0, \dots, n-1$ .

Es evidente que  $\mathcal{C}([a, b]) \subset \mathcal{C}_s([a, b])$ . Además, si  $u \in \mathcal{C}_s([a, b])$ , entonces  $u$  tiene límites laterales en cada punto del intervalo  $[a, b]$  y esos límites coinciden excepto a lo sumo en una cantidad finita de puntos. En otras palabras, dicha  $u$  es acotada y sólo tiene discontinuidades de salto finito en una cantidad también finita de puntos. En particular tenemos que  $u$  es integrable Riemann. Por lo cual, si  $u \in \mathcal{C}_s([a, b])$  y  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  son tales que  $u \in \mathcal{C}([t_k, t_{k+1}])$ , para todo  $k = 0, \dots, n-1$ , entonces la aditividad de la integral respecto del dominio de integración establece que

$$\int_a^b u(s)ds = \int_a^{t_1} u(s)ds + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} u(s)ds.$$

Como consecuencia de la anterior identidad, se satisfacen dos propiedades. La primera, el *Teorema de anulación* que afirma que si  $u \in \mathcal{C}_s([a, b])$  es tal que  $u \geq 0$  e  $\int_a^b u(s)ds = 0$ , entonces  $u = 0$ . En segundo lugar, el *Teorema de continuidad* que establece que si  $u \in \mathcal{C}_s([a, b])$ , entonces  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} u(s)ds = \int_a^b u(s)ds$ .

Supongamos que  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  es un cambio de variable y  $u \in \mathcal{C}_s^1([a, b])$ , entonces se cumple no sólo  $u \circ \varphi \in \mathcal{C}_s^1([c, d])$  sino también que  $\int_a^b u(s)ds = \int_c^d u(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt$ .

Dado un intervalo cerrado  $[a, b]$  denotaremos por  $\mathcal{C}^1([a, b])$  al espacio de funciones derivables en  $[a, b]$  con derivada continua. Por tanto, si  $u \in \mathcal{C}^1([a, b])$ ,  $u$  es derivable en cada  $t \in (a, b)$ ,  $u$  tiene derivada lateral por la derecha en  $a$ , que denotaremos por  $u'(a)$ , derivada lateral por la izquierda en  $b$ , que denotaremos por  $u'(b)$ , y además la función  $u' \in \mathcal{C}([a, b])$ .

Denotaremos por  $\mathcal{C}_s^1([a, b])$  al espacio vectorial de las funciones *derivables a trozos en*  $[a, b]$ , o *funciones seccionalmente derivables*; esto es,  $u \in \mathcal{C}_s^1([a, b])$  sii satisface no sólo ser continua en  $[a, b]$ , sino también que existen  $n \in \mathbb{N}^*$  y  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tales que  $u \in \mathcal{C}^1([t_k, t_{k+1}])$ , para todo  $k = 0, \dots, n-1$ .

Claramente,  $\mathcal{C}^1([a, b]) \subset \mathcal{C}_s^1([a, b])$ , ya que si  $u \in \mathcal{C}^1([a, b])$ , basta con considerar  $n = 1$  en la afirmación anterior. Observemos también que  $u \in \mathcal{C}_s^1([a, b])$  sii  $u$  tiene tanto derivada lateral por la derecha en  $a$ , como derivada lateral por la izquierda en  $b$ , como ambas derivadas laterales en cada punto de  $(a, b)$  y además las derivadas laterales coinciden excepto a lo sumo en una cantidad finita de puntos de  $(a, b)$ .

Si  $u \in \mathcal{C}_s^1([a, b])$  y  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  son tales que  $u \in \mathcal{C}^1([t_k, t_{k+1}])$ , podemos definir la función  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(t) = \frac{1}{2}(u'(t^+) + u'(t^-))$ . Claramente  $\varphi(t) = u'(t)$  excepto a lo sumo en una cantidad finita de puntos. Asimismo,  $\varphi \in \mathcal{C}_s([a, b])$ , o lo que es lo mismo,  $\varphi$  es continua en  $[a, b]$  excepto en una cantidad finita de puntos y además sólo tiene discontinuidades de salto finito. En particular,  $\varphi$  es acotada.

Si denotamos por  $u'$  a la función  $\varphi$  anteriormente definida, podemos expresar el *Teorema Fundamental del Cálculo* para las funciones seccionalmente derivables de la manera siguiente:

Si  $u \in \mathcal{C}_s^1([a, b])$ , entonces  $u'$  es integrable Riemann y además

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(s)ds = u(b) - \int_x^b u'(s)ds.$$

Como  $u'$  es acotada y discontinua a lo sumo en una cantidad finita de puntos, es integrable Riemann. Consideremos ahora  $n \in \mathbb{N}^*$  y  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tales que  $u \in \mathcal{C}^1([t_k, t_{k+1}])$ , para todo  $k = 0, \dots, n-1$ . Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo a  $u$  en cada intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ , resulta que

$$u(x) = u(t_k) + \int_{t_k}^x u'(s)ds, \quad \text{para cada } x \in [t_k, t_{k+1}] \text{ y cada } k = 0, \dots, n-1.$$

Si  $x \in [a, b]$ , existe  $k = 0, \dots, n-1$  tal que  $x \in [t_k, t_{k+1})$  y por tanto, aplicando la aditividad de la integral de Riemann, respecto del intervalo de integración, resulta que

$$\begin{aligned} \int_a^x u'(s)ds &= \int_a^{t_1} u'(s)ds + \dots + \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(s)ds + \int_{t_k}^x u'(s)ds \\ &= u(t_1) - u(a) + \dots + u(t_k) - u(t_{k-1}) + u(x) - u(t_k) = u(x) - u(a) \end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$\int_x^b u'(s)ds = \int_a^b u'(s)ds - \int_a^x u'(s)ds = u(b) - u(a) - (u(x) - u(a)) = u(b) - u(x).$$



Finalmente, si  $u, v \in \mathcal{C}_s^1([a, b])$ , entonces se satisface *fórmula de integración por partes*:

$$\int_a^b u(s)v'(s) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(s)v(s)ds.$$

## 1.6. Desigualdades de Energía

A continuación demostraremos, mediante recursos elementales de integración, dos desigualdades básicas que relacionan la norma cuadrática de una función seccionalmente derivable que se anula en algún punto, con la de su derivada. Éstas nos serán de utilidad más adelante para asegurar la unicidad de soluciones de nuestros problemas. En este desarrollo nos faltará una tercera desigualdad, que hace uso de herramientas más sofisticadas como los desarrollos de Fourier; la cual podemos encontrar, junto con las otras dos, en [5].

Comenzaremos por la *Desigualdad de Poincaré*, gracias a la cual sabemos que si  $u \in \mathcal{C}_s^1([a, b])$  y además  $u(a) = u(b) = 0$ , entonces se cumple

$$\int_a^b u^2(s)ds \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b (u'(s))^2 ds.$$

donde se satisface la igualdad sii  $u(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Si consideramos la función  $q(x) = \frac{u(x)}{\sin\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)}$  y tomamos  $\varepsilon > 0$ , tenemos que  $q \in \mathcal{C}_s^1([a+\varepsilon, b-\varepsilon])$ . Como  $u \in \mathcal{C}(a, b)$ , aplicando la Regla de L'Hôpital obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} q(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{\sin\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(b-a)u'(x)}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)} = \frac{(b-a)}{\pi} u'(a), \\ \lim_{x \rightarrow b} q(x) &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{u(x)}{\sin\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{(b-a)u'(x)}{\pi \cos\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)} = \frac{(a-b)}{\pi} u'(b). \end{aligned}$$

Esto implica que  $q$  puede extenderse de forma continua a todo el intervalo  $[a, b]$ .

Como  $u(x) = q(x) \sin\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)$ , resulta que para todo  $\varepsilon > 0$  y todo  $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$  se satisface que  $u'(x) = q'(x) \sin\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right) + \frac{\pi}{b-a} q(x) \cos\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)$ , de manera



que

$$\begin{aligned}
 \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} (u'(x))^2 &= \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} (q'(x))^2 \sin^2 \left( \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right) dx + \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} q^2(x) \cos^2 \left( \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right) dx \\
 &\quad + \frac{\pi}{b-a} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} 2q(x)q'(x) \sin \left( \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right) \cos \left( \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right) dx \\
 &= \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} (q'(x))^2 \sin^2 \left( \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right) dx + \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} q^2(x) \cos^2 \left( \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right) dx \\
 &\quad + \frac{\pi}{b-a} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} q(x)q'(x) \sin \left( \frac{2\pi(x-a)}{b-a} \right) dx.
 \end{aligned}$$

Si definimos  $I(\varepsilon) = \frac{\pi}{b-a} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} q(x)q'(x) \sin \left( \frac{2\pi(x-a)}{b-a} \right) dx$  integrando por partes, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 I(\varepsilon) &= \frac{\pi}{2(b-a)} \left[ q^2(x) \sin \left( \frac{2\pi(x-a)}{b-a} \right) \right]_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} - \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} q^2(x) \cos \left( \frac{2\pi(x-a)}{b-a} \right) dx \\
 &= -\frac{\pi}{2(b-a)} \left[ q^2(b-\varepsilon) + q^2(a+\varepsilon) \right] \sin \left( \frac{2\pi}{b-a} \varepsilon \right) \\
 &\quad - \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} q^2(x) \cos^2 \left( \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right) dx + \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} q^2(x) \sin^2 \left( \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right) dx,
 \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
 \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} (u'(x))^2 &= \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} (q'(x))^2 \sin^2 \left( \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right) dx + \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} q^2(x) \sin^2 \left( \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right) dx \\
 &\quad - \frac{\pi}{2(b-a)} \left( q^2(b-\varepsilon) \sin(2\pi\varepsilon) + q^2(a+\varepsilon) \sin \left( \frac{2\pi}{b-a} \varepsilon \right) \right).
 \end{aligned}$$

Tomado límites cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y aplicando el Teorema de continuidad, resulta que

$$\begin{aligned}
 \int_a^b (u'(x))^2 &= \int_a^b (q'(x))^2 \sin^2 \left( \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right) dx + \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_a^b q^2(x) \sin^2 \left( \frac{\pi(x-a)}{b-a} \right) dx \\
 &\geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_a^b q^2(x) \sin^2 \left( \frac{\pi}{b-a} (x-a) \right) dx = \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \int_a^b u^2(x) dx.
 \end{aligned}$$

Esta afirmación constituye la *Desigualdad de Poincaré*. Observemos que la igualdad se cumple sii  $\int_a^b (q'(x))^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{b-a} (x-a) \right) dx = 0$ , esto es, aplicando el Teorema de anulación, sii  $q' = 0$ , o equivalentemente, sii  $q$  es constante.

Mediante un cambio de variable podemos obtener otras desigualdades a partir de la anterior. Concretamente, supongamos que  $u(a) = 0$  y consideremos  $v: [a, 2b - a] \rightarrow \mathbb{R}$  la extensión de  $u$  simétrica respecto de  $b$ , definida como

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & \text{si } a \leq x \leq b, \\ u(2b - x), & \text{si } b \leq x \leq 2b - a. \end{cases}$$

Por lo tanto tenemos que  $v \in \mathcal{C}_s^1([a, 2b - a])$ ,  $v(a) = v(2b - a) = u(a) = 0$  y

$$v'(x) = \begin{cases} u'(x), & \text{si } a \leq x \leq b, \\ -u'(2b - x), & \text{si } b \leq x \leq 2b - a. \end{cases}$$

Aplicando la desigualdad de Poincaré a  $v$ , obtenemos que

$$\int_a^{2b-a} (v'(s))^2 ds \geq \frac{\pi^2}{(2(b-a))^2} \int_a^{2b-a} v^2(s) ds = \frac{\pi^2}{4(b-a)^2} \int_a^{2b-a} v^2(s) ds \quad (1.6)$$

y se satisface la igualdad si y sólo si  $v(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2(b-a)}(x-a)\right)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Por otra parte, de las identidades

$$\begin{aligned} \int_a^{2b-a} v^2(s) ds &= \int_a^b u^2(s) ds + \int_b^{2b-a} u^2(2b-s) ds, \\ \int_a^{2b-a} (v'(s))^2 ds &= \int_a^b (u'(s))^2 ds + \int_b^{2b-a} (u'(2b-s))^2 ds, \end{aligned}$$

y considerando el cambio de variable  $t = 2b - s$  de  $[a, b]$  en  $[b, 2b - a]$ , resulta que

$$\int_b^{2b-a} u^2(2b-s) ds = \int_a^b u^2(t) dt \quad \text{e} \quad \int_b^{2b-a} (u'(2b-s))^2 ds = \int_a^b (u'(t))^2 dt,$$

por lo que (1.6) se cumple también para  $u$ .

Si en vez de  $u(a) = 0$  tenemos  $u(b) = 0$ , entonces considerando  $w: [2a - b, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la extensión de  $u$  simétrica respecto de  $a$  definida como

$$w(x) = \begin{cases} u(2a - x), & \text{si } 2a - b \leq x \leq a, \\ u(x), & \text{si } a \leq x \leq b, \end{cases}$$

obtenemos  $w \in \mathcal{C}_s^1([2a - b, b])$ ,  $w(2a - b) = w(b) = u(b) = 0$  y

$$w'(x) = \begin{cases} -u'(2a - x), & \text{si } a \leq x \leq b, \\ u'(x), & \text{si } b \leq x \leq 2b - a. \end{cases}$$

Aplicando la desigualdad de Poincaré a  $w$ , obtenemos que

$$\int_{2a-b}^b (w'(s))^2 ds \geq \frac{\pi^2}{(2(b-a))^2} \int_{2a-b}^b w^2(s) ds = \frac{\pi^2}{4(b-a)^2} \int_{2a-b}^b w^2(s) ds$$

con igualdad sii  $w(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2(b-a)}(x-2a+b)\right) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2(b-a)}(b-x)\right)$ . La conclusión final se obtiene de la misma manera que en el caso  $u(a) = 0$ .

De esta forma podemos afirmar que si  $u \in \mathcal{C}_s^1([a, b])$  y además o bien  $u(a) = 0$  o bien  $u(b) = 0$ , entonces

$$\int_a^b (u'(s))^2 ds \geq \frac{\pi^2}{4(b-a)^2} \int_a^b u^2(s) ds.$$

Asimismo, se satisface la igualdad si y sólo si  $u(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2(b-a)}(x-a)\right)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  cuando  $u(a) = 0$  y si y sólo si  $u(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2(b-a)}(b-x)\right)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  cuando  $u(b) = 0$ .

Por lo tanto, si en cambio tenemos que  $u(c) = 0$  para cierto  $c \in [a, b]$ , se cumple

$$\begin{aligned} \int_a^c (u'(s))^2 ds &\geq \frac{\pi^2}{4(c-a)^2} \int_a^c u^2(s) ds \geq \frac{\pi^2}{4(b-a)^2} \int_a^c u^2(s) ds, \\ \int_c^b (u'(s))^2 ds &\geq \frac{\pi^2}{4(b-c)^2} \int_c^b u^2(s) ds \geq \frac{\pi^2}{4(b-a)^2} \int_c^b u^2(s) ds. \end{aligned}$$

Observemos que la segunda igualdad se satisface sii  $\frac{\pi^2}{4(c-a)^2} = \frac{\pi^2}{4(b-a)^2}$  y  $\frac{\pi^2}{4(b-c)^2} = \frac{\pi^2}{4(b-a)^2}$  respectivamente, lo que ocurre sii o bien  $c = b$  o bien  $c = a$ .

De esta manera podemos sumar en ambos lados de las desigualdades y obtener

$$\int_a^b (u'(s))^2 ds \geq \frac{\pi^2}{4(b-a)^2} \int_a^b u^2(s) ds.$$

Cabe mencionar que si en vez de tener  $u \in \mathcal{C}_s^1([a, b])$ , nuestra función es seccionalmente derivable en su  $n$ -ésima derivada, es decir, tal que  $u \in \mathcal{C}_s^n([a, b])$ ; entonces podremos tomar  $v = u^{(n-1)}$  de manera que  $v \in \mathcal{C}_s^1([a, b])$ . De esta forma obtendremos los mismos resultados, pero esta vez relacionarán las derivadas de  $u$  de orden  $n-1$  y  $n$ .



## Capítulo 2

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Problema de Valores Iniciales

### 2.1. Problema de Valores Iniciales

Para comenzar, plantearemos el *Problema de Valores Iniciales*, PVI, o Problema de Cauchy, que más adelante resolveremos mediante el uso de la función de Green. Consideraremos  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo no trivial, es decir, un intervalo de  $\mathbb{R}$  distinto del vacío<sup>1</sup>;  $n \in \mathbb{N}^*$  y las funciones continuas  $f, a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Fijados  $t_0 \in I$  y  $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ ,

$$x^{(n)} = a_{n-1}(t)x(t) + a_{n-2}(t)x'(t) + \dots + a_0(t)x^{(n-1)}(t) + f(t) \quad (2.1)$$

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \quad (2.2)$$

constituye el PVI, donde (2.1) es una ecuación diferencial ordinaria (EDO) lineal de orden  $n$ , a la que llamaremos [EL], y (2.2) son las  $n$  condiciones iniciales necesarias para definir correctamente el problema.

Para el tratamiento de los problemas de valor inicial, nos hemos basado en la información contenida en [6]; y, especialmente, por lo que se refiere a la función de Green, en [7] y [8].

---

<sup>1</sup>Por tanto, es un subconjunto de la forma  $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$  donde  $a, b \in \mathbb{R} \mid a < b$ , o bien de la forma  $(-\infty, a), (-\infty, a], (a, +\infty), [a, +\infty)$  donde  $a \in \mathbb{R}$ , o bien  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ .

## 2.2. Cuestiones previas

### 2.2.1. Reducción a un sistema de primer orden

Antes de embarcarnos en la resolución del problema expuesto, vamos a simplificarlo mediante la reducción de la EDO de orden  $n$  a un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden.

Pongamos como ejemplo la siguiente ecuación de segundo orden:

$$x''(t) = f(t). \quad (2.3)$$

Si consideramos la función auxiliar  $y(t) = x'(t)$ , entonces  $x$  es solución a la ecuación (2.3) sii también lo es al sistema

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= f(t) \end{aligned} \right\}$$

Generalizando esta propiedad, podemos transformar nuestra EDO lineal de orden  $n$  en un sistema equivalente con la forma

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad (2.4)$$

donde  $F : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  y  $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ .

Además, en el caso de las ecuaciones lineales, podemos reescribir el sistema (2.4) en función de la matriz de coeficientes  $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y del término de fuerza  $f^* : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , de forma

$$x'(t) = A(t)x(t) + f^*(t),$$

donde  $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{n-1}(t) & a_{n-2}(t) & a_{n-3}(t) & \cdots & a_0(t) \end{pmatrix}$  y  $f^*(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$ .

A partir de ahora nos referiremos a él como sistema lineal [SL] equivalente a la ecuación lineal [EL]. Cabe destacar que  $A(t)$  y  $f^*(t)$  son funciones continuas en  $I$  por estar compuestas por las funciones  $f, a_0, \dots, a_{n-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$  que también lo son.

Por otro lado, gracias al teorema del valor medio sabemos que dos funciones que son primitivas de la misma función difieren en una constante. Este es el motivo por el cual la ecuación diferencial más sencilla,  $x'(t) = f(t)$ , que equivale al cálculo de primitivas, tiene infinitas soluciones. Por ello, para determinar una de tales soluciones es necesario imponer una restricción, que, en el caso de los PVI, consiste en fijar su valor en un punto concreto.

Si ahora tenemos en cuenta que [EL] de orden  $n$ , se puede reescribir como un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden, entonces cada una de esas ecuaciones necesita una

condición inicial. De este modo, la expresión (2.2) puede ser equivalente a

$$x(t_0) = x_0,$$

donde  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Resumiendo, podemos expresar el Problema de Valores Iniciales planteado en el apartado 2.1, como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con  $n$  condiciones iniciales. Sea  $A(t)$  la matriz de coeficientes del sistema tal que  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  y  $f^* : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua en  $I$ . Fijados  $t_0 \in I$  y  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  llamaremos PVI equivalente a

$$x'(t) = A(t)x(t) + f^*(t),$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Como cabe esperar,  $x$  es solución al PVI equivalente sii es solución del PVI expuesto en el (2.1), y viceversa; es decir, se establece una biyección entre las soluciones de ambos problemas. Asimismo, se mantienen las propiedades estructurales. Esto quiere decir que, como ya hemos apuntado, las funciones que determinan la EDO y el sistema tienen la misma regularidad. Por último, esto también implica la conservación del carácter lineal del problema.

### 2.2.2. Existencia y unicidad de soluciones

Antes de plantear un problema es conveniente hacerse una idea de la naturaleza de sus soluciones. En vista de la equivalencia entre la ecuación lineal y el sistema lineal, nos podemos limitar a estudiar las propiedades de las soluciones de las EDOs lineales de primer orden. Si recordamos la fórmula de Lagrange obtenemos que, fijados  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo no trivial y el coeficiente  $a \in \mathcal{C}(I)$ , entonces para cada  $t_0 \in I$ , cada  $x_0 \in \mathbb{R}$  y cada  $f \in \mathcal{C}(I)$ , el PVI

$$x'(t) = a(t)x(t) + f(t), \quad (2.5)$$

$$x(t_0) = x_0$$

tiene solución única que está dada por la identidad:

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(u) du} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(u) du} f(s) ds. \quad (2.6)$$

Al decir que  $x(t)$  es la única solución, nos referimos a que es la única solución global a la EDO que cumple las condiciones iniciales impuestas; pues es sencillo comprobar que se trata de una función  $\mathcal{C}^2(I)$ , y por tanto, definida en el mismo intervalo que la EDO.

Por otro lado, para no perder generalidad, teniendo en cuenta el *Teorema de Cauchy-Peano* sobre la existencia de soluciones locales, dada  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función



continua, el PVI  $x'(t) = F(t, x(t)), x(t_0) = x_0$  tiene al menos una solución. Más concretamente, si cada función componente de  $F$  tiene derivadas parciales continuas con respecto a todas las variables espaciales, el PVI tiene una única solución maximal<sup>2</sup>.

A este resultado podemos sumarle la posibilidad de garantizar la globalidad de las soluciones maximales. Sea  $n \in \mathbb{N}^*$  y  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua y de crecimiento sublineal, es decir, tal que existen  $h, k : I \rightarrow [0, +\infty)$  funciones continuas que satisfacen  $\|F(t, x)\| \leq h(t) + k(t)\|x\|$ , para todo  $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$ , entonces las soluciones maximales de la EDO  $x'(t) = F(t, x(t))$  son globales.

Ahora ya podemos concretar las condiciones bajo las cuales podemos asegurar que existe una solución a un sistema de EDOs lineales de primer orden y que ésta es única y global. Si  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua y globalmente Lipschitziana respecto a la variable espacial, es decir, una función continua tal que existe  $L : I \rightarrow [0, +\infty)$  también continua, que cumple  $\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|$ , para todo  $t \in I$  y todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, el PVI  $x'(t) = F(t, x(t)), x(t_0) = x_0$  tiene una única solución global.

Este resultado es posible debido a que decir que una función es globalmente Lipschitziana es una forma débil de afirmar que sus derivadas parciales con respecto a todas las variables espaciales son continuas y que además tiene un crecimiento sublineal.

Por otro lado, la biyección entre las soluciones del problema asociado a la EDO y al sistema de ecuaciones hace que la propiedad local, global o maximal de las soluciones se transfiera. Más concretamente, si  $x$  es una solución de la [EL] e  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la solución del sistema asociado (2.4), entonces  $x$  es maximal, local o global sii  $y$  es maximal, local o global respectivamente.

Resumiendo, hemos conseguido determinar si cada PVI tiene solución, cuándo existe una única solución maximal y bajo qué condiciones ésta es global además de maximal.

### 2.3. Teoría general del PVI

A lo largo de este apartado nos centraremos en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con unas condiciones iniciales fijadas a las que nos podremos referir como CI. Dada la equivalencia entre las ecuaciones diferenciales y los sistemas de ecuaciones, nos limitaremos al estudio de sistemas lineales de primer orden.

Buscamos, pues, la solución a la [EL] que está determinada por la función continua  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $F(t, x) = A(t)x + f(t)$ . Definamos  $L : I \rightarrow [0, +\infty)$  tal que  $L(t) = \|A(t)\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2(t)}$ . Entonces, gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos  $\|F(t, x) - F(t, y)\| = \|A(t)(x - y)\| \leq L(t)\|x - y\|$  para todo  $t \in I$  y todo

---

<sup>2</sup>Una solución es maximal sii no puede prolongarse a otra solución, es decir, sii su intervalo de definición es lo mayor posible. Por definición, una solución global siempre será maximal, pero una solución maximal no tiene por qué ser global.



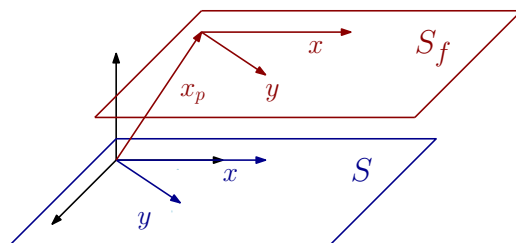
$x, y \in \mathbb{R}^n$ , por lo que  $F$  se trata de una función globalmente Lipschitziana respecto a la variable espacial.

Como hemos visto, esto nos asegura que todas las soluciones a la [EL] son globales -además de que cada PVI tiene una única solución-, lo cual nos permite superponer soluciones, es decir, nos permite obtener cualquier solución  $x$  a la [EL] mediante una combinación lineal de soluciones. Más concretamente, se tiene que  $x = x_h + x_p$ , donde  $x_p$  es una solución particular a la [EL] mientras que  $x_h$  es una solución de la *ecuación homogénea asociada* [EH], definida como

$$x^{(n)}(t) = a_0(t)x(t) + a_1(t)x'(t) + \dots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t),$$

donde  $n \in \mathbb{N}^*$  es el orden de la ecuación diferencial y las funciones  $a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas en  $I$ .

Además, el conjunto de soluciones a la [EH], que denotaremos por  $S$ , forma un espacio vectorial dado que, en primer lugar, podemos hallar una nueva solución a la [EH] superponiendo dos de estas soluciones, de manera que  $z(t) = x(t) + y(t)$  donde  $z, x, y \in S$ ; y en segundo lugar, al multiplicar una solución al [EH] por una constante, obtenemos otra solución al [EH], es decir  $z(t) = ay(t)$ , donde  $a \in \mathbb{R}$ . Se trata, de hecho, de un espacio vectorial real de dimensión  $n$ . Asimismo, podemos observar que el conjunto de soluciones a la ecuación lineal no homogénea ( $S_f$ ) es, para cada  $f \in \mathcal{C}(I)$ , un espacio afín asociado a  $S$ , dado que la resta de dos soluciones a la [EL] resulta en una solución a la [EH], o lo que es lo mismo,  $S_f = S + x_p$ . Como podemos observar en la figura (2.1), se puede ver el espacio afín  $S_f$  como el determinado por un punto fijado por  $x_p$  y un conjunto de direcciones definidas por las bases de  $S$ .



**Figura 2.1:** Representación del espacio de soluciones a la ecuación lineal no homogénea, en este caso de orden 2.

Sabiendo que cada PVI tiene una única solución, si  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es solución al PVI

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = 0,$$

entonces  $x(t) = 0, \forall t \in I$ . A partir de ahora llamaremos [SH] al *sistema homogéneo*  $x'(t) = A(t)x(t)$ .

Asumamos que  $x_1, \dots, x_n$  son  $n$  soluciones al [SH], que para que sean distintas han de tener condiciones iniciales distintas. Denotaremos dichas condiciones iniciales

por  $v_j$ , de forma que, fijados  $t_0 \in I$ ,  $v_j = x_j(t_0) \in \mathbb{R}^n$  donde  $j = 1, \dots, n$ . Supongamos que  $v_1, \dots, v_n$  son  $n$  vectores linealmente independientes. Sabemos que existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tal que  $x(t) = 0 = \alpha_1 x_1(t) + \dots + \alpha_n x_n(t)$  y en particular tal que  $x(t_0) = \alpha_1 x_1(t_0) + \dots + \alpha_n x_n(t_0) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ . Como  $v_1, \dots, v_n$  son vectores linealmente independientes, entonces  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ . Esto implica que  $x_1, \dots, x_n$  son también linealmente independientes, por lo que  $(x_1, \dots, x_n)$  conforma una base de soluciones del [SH], además de una base de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\forall t \in I$ .

Por lo tanto, tenemos que si existe  $t_0 \in I$  tal que  $(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$  es base de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $(x_1, \dots, x_n)$  son  $n$  vectores linealmente independientes que forman la base de soluciones del [SH]. De esta forma hemos obtenido un método para hallar las bases del espacio vectorial formado por las soluciones al [SH]. Esto significa que dicho espacio estará determinado por

$$\{x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}. \quad (2.7)$$

Supongamos ahora que  $x_1, \dots, x_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  son funciones de clase  $\mathcal{C}^n(I)$  donde para cada  $j = 1, \dots, n$  se tiene que

$$x_j(t) = \begin{pmatrix} x_j(t) \\ x'_j(t) \\ \vdots \\ x_j^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Sea  $\Phi : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la aplicación matricial dada por

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \forall t \in I.$$

Si  $x_1, \dots, x_n$  son simultáneamente soluciones al [SH]  $x'(t) = A(t)x(t)$ , entonces se satisface  $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ ,  $\forall t \in I$ .

Ahora estamos en disposición de definir el concepto de *matriz fundamental*. La aplicación matricial de clase  $\mathcal{C}^1(I)$   $\Phi : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , es fundamental para el [SH] si además de cumplir  $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ ,  $\forall t \in I$ , existe al menos un  $t_0 \in I$  |  $\det(\Phi(t_0)) \neq 0$ . Esto es equivalente a que  $\det \Phi(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$  dado que la independencia lineal de un conjunto de vectores implica la del otro, y viceversa. Es decir,  $\det \Phi(t)$  ha de ser o bien distinto de 0, o bien nulo para todo  $t \in I$ , dependiendo si el determinante formado por las condiciones iniciales lo es, o no.

Nos será útil para más adelante, definir el *Wronskiano* de un conjunto de funciones como el determinante formado por las funciones y sus derivadas de la manera siguiente:

$$w[x_1, \dots, x_n](t) = \det \Phi(t) = \det \begin{bmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ x'_1(t) & \dots & x'_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

De hecho, al derivar el Wronskiano, podemos probar que se cumple el *lema de Abel Liouville*. Éste afirma que fijado  $s \in I$  se satisface

$$w(t) = w(s)e^{\int_s^t \text{tr} A(\tau) d\tau}. \quad (2.8)$$

Esto es debido a que la derivada del Wronskiano resulta ser la multiplicación de su primitiva por una función de los coeficientes de la matriz  $A$ .

Podemos, ahora, reescribir el espacio vectorial (2.7) en función de la matriz fundamental de la siguiente manera:

$$\{x(t) = \Phi(t)k : k \in \mathbb{R}^n\}.$$

De hecho, si planteamos el PVI

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

entonces  $x(t) = \Phi(t)k$  para algún  $k \in \mathbb{R}^n$  y, por tanto,  $x_0 = \Phi(t_0)k$ . Como  $\Phi(t_0)$  es invertible,  $\Phi^{-1}(t_0)x_0 = k$ . Por tanto, la única solución al PVI (2.9) está dada por

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0.$$

Ahora buscaremos soluciones, en función de  $\Phi$ , al sistema lineal no homogéneo

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad (2.10)$$

donde  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua. Para ello utilizaremos el método de variación de constantes. Buscamos la función  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1(I)$  tal que  $x_p(t) = \Phi(t)c(t)$  sea solución al [SL] (2.10), por lo que  $A(t)\Phi(t)c(t) + f(t) = [\Phi(t)c(t)]' = \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + \Phi(t)c'(t)$ . Y, despejando  $c'(t)$ , obtenemos

$$c'(t) = \Phi^{-1}(t)f(t).$$

Es decir,  $c$  ha de ser una primitiva de la función  $\Phi^{-1}(t)f(t)$ .

Por lo tanto, las soluciones a (2.10) están dadas por

$$x(t) = \Phi(t)[c + \alpha(t)], \quad (2.11)$$

donde  $c \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface  $\alpha'(t) = \Phi^{-1}(t)f(t)$ . Si ahora fijamos unas condiciones iniciales  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , definimos un PVI que nos permite identificar la constante  $c$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t_0) = \Phi(t_0)[c + \alpha(t_0)] \\ c &= \Phi^{-1}(t_0)x_0 - \alpha(t_0). \end{aligned}$$



Sustituyéndola en (2.11), hallamos la única solución al PVI:

$$x(t) = \Phi(t)[\Phi^{-1}(t_0)x_0 - \alpha(t_0) + \alpha(t)] = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)[\alpha(t) - \alpha(t_0)],$$

donde  $\alpha(t) - \alpha(t_0)$  es precisamente la única primitiva de  $\Phi^{-1}(t)f(t)$  que se anula en  $t_0$ .

Resumiendo, fijados  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I$  un intervalo no trivial,  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  una función continua. Siendo  $\Phi : I \rightarrow \mathcal{M}_n$  la matriz fundamental del [SH]  $x'(t) = A(t)x(t)$ , entonces para cada  $t_0 \in I$ , cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y cada  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, tenemos que la *fórmula de Lagrange*, expresada como

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds, \quad (2.12)$$

es la única solución al PVI  $x'(t) = A(t)x(t) + f(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

Cabe destacar que la solución está compuesta por la suma de la solución al PVI homogéneo con  $x(t_0) = x_0$  como CI:

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0, \quad (2.13)$$

y la solución al PVI particular con CI nulas:

$$\Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds. \quad (2.14)$$

## 2.4. La Función de Green del PVI

Por definición, la matriz fundamental  $\Phi$  depende de la base que elijamos para el espacio vectorial formado por el conjunto de soluciones al [SH]. Por ello, la relación entre las diferentes bases de soluciones fijadas determina la relación entre matrices fundamentales.

Supongamos que  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es una aplicación matricial continua,  $\Phi : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es la matriz fundamental al [SH]  $x'(t) = A(t)x(t)$  y  $\Psi : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  una aplicación matricial de clase  $C^1(I)$  que satisface  $\Psi'(t) = A(t)\Psi(t)$ ,  $\forall t \in I$ . Si  $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  son columnas de  $\Psi$ , entonces son soluciones al [SH]. Por tanto, para cada  $j = 1, \dots, n$  debe existir  $p_j \in \mathbb{R} \mid y_j(t) = \Phi(t)p_j \forall t \in I$ .

Consideremos ahora  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matriz de columnas  $p_1, \dots, p_n$ , que por definición cumple  $\Psi(t) = \Phi(t)P$ ,  $\forall t \in I$ . Teniendo en cuenta que  $\det(\Psi(t)) = \det(\Phi(t))\det(P)$ ,  $\Psi$  es una matriz fundamental del [SH] sii  $P$  no es singular, es decir, sii  $\det(P) \neq 0$ . Dicho de otra forma, dos matrices fundamentales del mismo sistema difieren en una matriz no singular que no depende del tiempo. Es más, como  $\Psi(t) = \Phi(t)P$ ,  $\forall t \in I$ , si existe  $s \in I \mid \Psi(s) = \Phi(s)$ , entonces, como  $\Psi(s) = \Phi(s)P$  y  $\Phi(s)$  es invertible, necesariamente tenemos que  $P = I$  y  $\Psi(t) = \Phi(t) \forall t \in I$ . Esto implica que para cada  $s \in I$  existe una única matriz fundamental que cumple  $\Phi(s) = I$ .

Fijado  $s \in I$ ,  $\Phi(s)$  es no singular, por lo que existe su inversa y podemos definir la aplicación matricial  $\Psi : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  como  $\Psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$  para todo  $t \in I$ .  $\Psi$  no sólo es también fundamental, sino que se trata de la única matriz fundamental que cumple  $\Psi(s) = I$ . Nótese que si  $\Phi$  y  $\Psi$  son dos matrices fundamentales del mismo [SH], entonces para cada  $s \in I$  se satisface que  $\Phi(t)\Phi^{-1}(s) = \Psi(t)\Psi^{-1}(s), \forall t \in I$ .

Por fin podemos proceder a definir la *Función de Green del sistema*  $x'(t) = A(t)x(t)$ , como la aplicación matricial:

$$\begin{aligned} G : I \times I &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (t, s) &\longmapsto \Phi(t)\Phi^{-1}(s) \end{aligned}$$

donde  $\Phi : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es cualquier matriz fundamental del sistema.

Debemos destacar que, por definición, fijado  $s \in I$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ , la columna  $j$ -ésima de  $G(t, s)$  es precisamente la única solución del PVI  $x'(t) = A(t)x(t)$ ,  $x(s) = e_j$ , donde  $e_j$  es el  $j$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

De hecho, dado que en general no nos interesará resolver un sistema de ecuaciones sino un único PVI, en la mayoría de los casos nos centraremos tan sólo en el primer elemento de la columna  $n$ -ésima de  $G(t, s)$  al que llamaremos *Función de Green del PVI* y denotaremos por  $g(t, s)$ . Esto es debido a que, fijado  $s \in I$ ,  $g(t, s)$  es precisamente la única solución al PVI homogéneo de orden  $n$ :

$$\begin{aligned} a_0(t)x^n + a_1(t)x^{n-1} + \dots + a_n(t)x(t) &= 0 \\ x(s) = x'(s) = \dots = x^{(n-2)}(s) &= 0, \quad x^{(n-1)}(s) = \frac{1}{a_0(s)}, \end{aligned}$$

donde  $a_0, \dots, a_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas tal que  $a_0(t) \neq 0, \forall t \in I$ . Observemos que la última condición inicial deja de ser 1 para valer  $\frac{1}{a_0(s)}$ . Esto es debido a que hemos dejado de considerar la EDO explícita, por lo que será necesario pasar dividiendo el coeficiente principal.

De la propia definición de Función de Green del sistema también podemos deducir las siguientes propiedades:

- (i)  $G(t, s) \in \mathcal{C}^1(I \times I)$ .
- (ii)  $G(s, s) = I$ .
- (iii)  $G(s, t) = G^{-1}(t, s), \forall t, s \in I$ .
- (iv)  $G(t, s)G(s, \tau) = G(t, \tau), \forall t, s, \tau \in I$ .
- (v)  $\det(G(t, s)) = e^{\int_s^t \text{tr} A(\tau) d\tau}, \forall t, s \in I$ .

Ahora podemos reescribir la fórmula de Lagrange como la de Lagrange-Green. Si  $G : I \times I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es la función de Green del [SH]  $x'(t) = A(t)x(t)$ , entonces para cada



$t_0 \in I$ , cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , cada  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua:

$$x(t) = G(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t G(t, s)f(s)ds \quad (2.15)$$

es la única solución al PVI  $x'(t) = A(t)x(t) + f(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

En particular, utilizando la definición de la Función de Green del PVI tenemos que la única solución al PVI

$$\begin{aligned} a_0(t)x^n + a_1(t)x^{n-1} + \dots + a_n(t)x(t) &= f(t) \\ x(t_0) = x'(t_0) &= \dots = x^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{aligned}$$

está dada por

$$\int_{t_0}^t g(t, s)f(s)ds.$$

Llegados a este punto es conveniente dar una interpretación física de la solución hallada. Gracias al principio de superposición, la respuesta de nuestro sistema ha sido expresada como la suma de dos respuestas. La primera,  $G(t, t_0)x_0$ , es la respuesta a una modificación de las condiciones del sistema en el instante  $t_0$ , sin la aplicación de acciones externas. La segunda,  $\int_{t_0}^t G(t, s)f(s)ds$ , es la respuesta a la aplicación de acciones externas a partir del instante  $t_0$ , cuando el sistema está en reposo. De esta forma, si identificamos la función nula como un estado de equilibrio del sistema, dicho estado se ve perturbado en el instante  $t_0$ , o bien por una modificación de las condiciones iniciales, o bien por una acción externa, por lo que el sistema evolucionará siguiendo la solución descrita.

### 2.4.1. Función de Green en el Problema Inverso

Hemos visto cómo  $G(t, s)$  depende exclusivamente de la matriz de coeficientes  $A(t)$ , pues lo único necesario para hallarla ha sido definir el [SH]. La matriz de coeficientes contiene las características del sistema físico, por lo que  $G(t, s)$  es una propiedad intrínseca al sistema, una especie de caja negra capaz de predecir el estado del sistema dada una perturbación.

Esto hace que sea extremadamente útil a la hora de resolver el problema inverso, esto es, a la hora de hallar las características de un sistema, conocida su respuesta ante una perturbación concreta. De hecho, una vez se conoce la función de Green de un sistema, podemos recuperar los coeficientes que determinan dicho sistema. Concretamente, fijado  $s_0 \in I$  y considerando  $G(t, s_0)$  como una función de  $t$ , resulta que  $G'(t, s_0) = A(t)G(t, s_0)$ . Si tenemos en cuenta la propiedad (iii), tenemos que

$$A(t) = G'(t, s_0)G(s_0, t), \quad \forall t \in I. \quad (2.16)$$

### 2.4.2. La Función de Green como la respuesta ante una perturbación puntual

Supongamos que queremos conocer la respuesta del sistema ante una perturbación puntual concentrada en  $\hat{s} \in I$ . Asumiendo la continuidad del comportamiento del sistema ante perturbaciones, la respuesta ante una acción concentrada es el límite de la respuesta ante acciones distribuidas cada vez más concentradas en torno a  $\hat{s}$ , que modelaremos mediante la sucesión de funciones  $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$  definida en el apartado 1.3.

Sea  $t_0 \in I \mid t_0 < \hat{s}$ . Para cada  $j$  consideremos que la respuesta ante una acción externa distribuida  $\psi_j(t)$  que satisface  $u_j(t_0) = 0$  está dada por  $u_j(t) = \int_{t_0}^t g(t, s)\psi_j(s)ds$ , donde  $g(t, s)$  es la Función de Green del PVI. Entonces, la respuesta ante una acción concentrada debe estar dada por  $u_{\hat{s}}(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(t)$ .

Si tomamos  $t \in I \mid t < \hat{s}$ , entonces existe  $j_0$  tal que si  $j \geq j_0$ , tenemos  $t_0, t < \hat{s} - \varepsilon_j$ , donde  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una serie de números reales que tiende a cero. En este caso obtenemos que  $u_j(t) = \int_{t_0}^t g(t, s)\psi_j(s)ds = 0$ .

Si tomamos  $t \in I \mid t > \hat{s}$ , entonces existe  $j_0$  tal que si  $j \geq j_0$ ,  $t_0 < \hat{s} - \varepsilon_j$  y  $\hat{s} + \varepsilon_j < t$ . En este caso  $u_j(t) - g(t, \hat{s}) = \int_{t_0}^t g(t, s)\psi_j(s)ds - g(t, \hat{s}) = \int_{\hat{s}-\varepsilon_j}^{\hat{s}+\varepsilon_j} g(t, s)\psi_j(s)ds - g(t, \hat{s}) \int_{\hat{s}-\varepsilon_j}^{\hat{s}+\varepsilon_j} \psi_j(s)ds = \int_{\hat{s}-\varepsilon_j}^{\hat{s}+\varepsilon_j} [g(t, s) - g(t, \hat{s})]\psi_j(s)ds$ .

Como  $g$  es una función continua, fijado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que si  $|s - \hat{s}| \leq \delta$  entonces,  $|g(t, s) - g(t, \hat{s})| \leq \epsilon$ . Si tomamos  $j_1 \geq j_0 \mid \varepsilon_j \leq \delta$ , entonces para todo  $j \geq j_1$  tenemos  $|u_j(t) - g(t, \hat{s})| = \left| \int_{\hat{s}-\varepsilon_j}^{\hat{s}+\varepsilon_j} [g(t, s) - g(t, \hat{s})]\psi_j(s)ds \right| = \int_{\hat{s}-\varepsilon_j}^{\hat{s}+\varepsilon_j} |g(t, s) - g(t, \hat{s})|\psi_j(s)ds \leq \epsilon \int_{\hat{s}-\varepsilon_j}^{\hat{s}+\varepsilon_j} \psi_j(s)ds = \epsilon$ . Esto implica que  $u_{\hat{s}}(t) = g(t, \hat{s})$ .

Resumiendo, en general, tenemos que

$$u_{\hat{s}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq \hat{s}, \\ g(t, \hat{s}), & \text{si } t \geq \hat{s}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Esto es, que la función de Green contiene la información sobre la respuesta a una acción puntual o concentrada en el punto  $\hat{s} \in I$ .

Asimismo, teniendo en cuenta que hemos definido la delta de Dirac como  $\delta_{\hat{s}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j(t)$ , obtenemos que

$$u_{\hat{s}}(t) = \int_{\hat{s}}^t g(t, s)\delta_{\hat{s}}ds \quad (2.18)$$



es la única respuesta al PVI

$$\begin{aligned} a_0(t)x^n + a_1(t)x^{n-1} + \cdots + a_n(t)x(t) &= \delta_{\hat{s}} \\ x(t_0) = x'(t_0) &= \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{aligned}$$

donde  $t_0 < \hat{s}$  y las funciones  $a_0, \dots, a_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas tal que  $a_0(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in I$ .

Dadas las discontinuidades que introduce una perturbación puntual modelada por la delta de Dirac, resulta que  $u_{\hat{s}}^{(n-1)}(\hat{s}^+) - u_{\hat{s}}^{(n-1)}(\hat{s}^-) = g^{(n-1)}(\hat{s}^+, \hat{s}^-) = \frac{1}{a_0(\hat{s})}$ .

### 2.4.3. Función de Green como operador inverso

Fijados  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo no trivial,  $n \in \mathbb{N}^*$  y las funciones  $a_0, \dots, a_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  continuas tal que  $a_0(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in I$ ; denominaremos operador diferencial lineal de orden  $n$  asociado a los coeficientes  $a_0, \dots, a_n$  a la aplicación:

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}^n(I) &\rightarrow \mathcal{C}(I) \\ x &\mapsto a_n x + a_{n-1} x' + \cdots + a_0 x^{(n)} \end{aligned}$$

El hecho de que toda EDO de este tipo tenga al menos una solución implica que  $L$  es una aplicación lineal sobreyectiva.

Si  $S$  es el espacio de soluciones de la [EH]  $L(x) = 0$ , entonces  $\ker L = S$ , lo cual implica que  $\dim(\ker L) = n$ . Dado  $t_0 \in I$ , definamos  $\mathcal{V}_{t_0} = \{x \in \mathcal{C}^n(I) : x(t_0) = x'(t_0) = \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0\}$ .  $\mathcal{V}_{t_0}$  es un subespacio vectorial que satisface  $\mathcal{C}^n(I) = \ker L \oplus \mathcal{V}_{t_0}$ <sup>3</sup>, dado que la unicidad de soluciones de cada PVI implica que  $\ker L \cap \mathcal{V}_{t_0} = \emptyset$ .

Por otro lado, sea  $x \in \mathcal{C}^n(I)$  la función que satisface  $L(x) = f$  y  $x(t_0) = x_0$ ,  $x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$ , es decir, la única solución a la [EL] que en  $t_0$  toma los valores  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ . Podemos expresar  $x$  como la superposición de dos soluciones, la solución al problema homogéneo  $x_h$ , con condiciones iniciales en  $t_0$  de valor  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ ; y la solución a la EDO particular con condiciones iniciales nulas,  $x_p$ . Esto es,  $x = x_h + x_p$  donde  $x_h \in \ker L$  y  $x_p \in \mathcal{V}_{t_0}$ .

Teniendo en cuenta no sólo la existencia de soluciones sino también la unicidad de ellas, podemos concluir que  $L : \mathcal{V}_{t_0} \rightarrow \mathcal{C}(I)$  es un isomorfismo<sup>4</sup>. Por ello, podemos buscar el operador inverso de  $L$ , que definiremos precisamente como el *operador de Green* del problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{t_0} : \mathcal{C}(I) &\rightarrow \mathcal{V}_{t_0} \\ f &\mapsto \int_{t_0}^t g(t, s) f(s) ds. \end{aligned}$$

<sup>3</sup> $V$  es la suma directa de  $S_1$  y  $S_2$  si  $\forall v \in V, \exists!(u, w) \in S_1 \times S_2 \mid v = u + w$ . Esto implica que  $V = S_1 + S_2$  y  $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ .

<sup>4</sup>La palabra isomorfismo significa *igual forma*. En el álgebra un isomorfismo es una aplicación que además de ser un homomorfismo, es biyectiva. Esta última propiedad es la que hace que exista un operador inverso.



Se trata, más concretamente, del operador inverso de la restricción de  $L$  a  $\mathcal{V}_{t_0}$ . Además, cabe destacar que aunque la función de Green del PVI es única, existe un operador de Green  $\mathcal{G}_{t_0}$  para cada  $t_0 \in I$ .

## 2.5. Ecuaciones con coeficientes constantes

A lo largo de los apartados anteriores hemos desarrollado la teoría general de los PVI. Ha quedado demostrado que para resolver uno de éstos, tan sólo tenemos que encontrar una base de soluciones para la ecuación homogénea. Sin embargo, en la práctica, muchas veces no es posible obtener tal base de manera explícita. Un caso para el cual esto siempre es posible, es el relacionado a una ecuación diferencial con coeficientes constantes. Por suerte, la mayoría de aplicaciones están relacionadas a ecuaciones de este tipo, dado que las propiedades de los sistemas que modelamos no suelen depender del tiempo.

Con el fin de obtener resultados explícitos que nos sean de utilidad más adelante, ya no resolveremos los sistemas lineales, como hemos hecho al desarrollar la teoría general, sino que nos centraremos en un tratamiento más específico de los PVI, es decir, dados  $t_0 \in I$  y  $f \in \mathcal{C}(I)$ , nos centraremos en los Problemas de Valores Iniciales implícitos de la forma

$$\begin{aligned} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n x(t) &= f(t) \\ x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) &= x_{n-1}, \end{aligned}$$

donde  $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$  con  $a_0 \neq 0$  y  $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ .

Al igual que en el caso general, en primer lugar buscaremos una base de soluciones a la ecuación homogénea que cumpla las CI. Para ello hallaremos una base de soluciones a la [EH] a la que posteriormente impondremos las condiciones iniciales.

Es fácil comprobar que en el caso de ecuaciones con coeficientes constantes si  $x(t)$  es una solución a la [EH], entonces  $z(t) = x(t - t_0)$  es también solución de la [EH] para cada  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Observemos que la ecuación homogénea está definida en todo  $\mathbb{R}$ , esto es, ahora tenemos que  $I = \mathbb{R}$ . De hecho, esta propiedad caracteriza a los sistemas y/o ecuaciones explícitas; es decir,  $a_0(t) = 1$  para todo  $t$ , con coeficientes constantes.

Esta propiedad, tan característica de este tipo de ecuaciones, es de gran utilidad a la hora de resolver los problemas, ya que si  $x$  es la solución al problema

$$\begin{aligned} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n x(t) &= 0 \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) &= x_{n-1}, \end{aligned}$$

entonces,  $z = x(t - t_0)$  es solución a

$$\begin{aligned} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n x(t) &= 0 \\ x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) &= x_{n-1}. \end{aligned}$$



En particular tenemos que la función de Green del PVI estará dada por  $g(t, s) = \alpha(t - s)$  donde  $\alpha$  es la única solución al PVI

$$\begin{aligned} a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x(t) &= 0 \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \dots, \quad x^{(n-1)}(0) &= \frac{1}{a_0}. \end{aligned}$$

Para hallar una base de soluciones a la [EH] procederemos por analogía. Dado que las soluciones a las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de primer orden con coeficientes constantes son siempre funciones exponenciales, cabe preguntarnos si lo mismo ocurriría para ecuaciones de orden  $n$ .

Para que  $u(t) = e^{rt}$  sea solución a la EDO de orden  $n$ , ella y sus derivadas  $u'(t) = r e^{rt}$ ,  $u''(t) = r^2 e^{rt}$ ,  $\dots$ ,  $u^{(n)}(t) = r^n e^{rt}$  han de cumplir  $a_0 u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_n u(t) = 0$ , por lo que tendremos que si  $e^{rt}$  es efectivamente una solución, entonces  $e^{rt}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n) = 0$ , o equivalentemente  $a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$ . De hecho, llamaremos al polinomio

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

el *polinomio característico* de la [EH].

Sus raíces nos indicarán los valores de  $r$  para los cuales nuestra exponencial será una solución a la [EH]. Obtendremos tantas raíces como orden tenga el polinomio y éstas serán tanto reales como complejas. Al tratarse de un polinomio con coeficientes reales, el número de raíces complejas será siempre par, dado que si una es raíz, su conjugada también lo es. Consecuentemente, podemos expresar el polinomio como

$$P(x) = a_0 \prod_{j=1}^{\rho} (x - \lambda_j)^{d_j} \prod_{j=1}^s (x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j)^{m_j},$$

con  $n = d_1 + \cdots + d_{\rho} + 2(m_1 + \cdots + m_s)$ , donde  $n$  es el grado del polinomio.

Por lo tanto, tendremos que  $e^{\lambda_j t}$ ,  $t e^{\lambda_j t}$ ,  $\dots$ ,  $t^{d_j-1} e^{\lambda_j t}$  para todo  $j = 1, \dots, \rho$  y  $e^{a_j t} \sin(b_j t)$ ,  $e^{a_j t} \cos(b_j t)$ ,  $t e^{a_j t} \sin(b_j t)$ ,  $t e^{a_j t} \cos(b_j t)$ ,  $\dots$ ,  $t^{m_j-1} e^{a_j t} \sin(b_j t)$ ,  $t^{m_j-1} e^{a_j t} \cos(b_j t)$  para todo  $j = 1, \dots, s$  serán distintas soluciones a la [EH]. Para hallar las soluciones correspondientes a raíces múltiples hemos tenido en cuenta que si una raíz  $r$  tiene multiplicidad  $k$ , entonces  $P(r) = P'(r) = \cdots = P^{(k-1)}(r) = 0$ . Todavía no podemos afirmar que estas soluciones constituyan una base dado que no hemos comprobado que sean linealmente independientes.

Llegados a este punto, para poder hallar resultados explícitos nos interesará centrarnos en las EDOs de segundo y cuarto orden, dado que serán éstas las que utilizaremos en nuestras aplicaciones.

### 2.5.1. Ecuaciones de segundo orden

Dos soluciones a una [EH] de segundo orden pueden haber sido formadas a partir de, o bien dos raíces complejas, o bien una raíz real doble, o bien dos raíces reales. Más concretamente, estas soluciones serán de la forma  $e^{at} \sin(bt)$ ,  $e^{at} \cos(bt)$  en el primero de los casos;  $e^{\lambda t}$ ,  $te^{\lambda t}$  en el segundo de ellos y  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $e^{\lambda_2 t}$  en el tercero.

Una forma de asegurarnos de que nuestras soluciones son linealmente independientes es utilizar la propiedad descrita en el apartado **2.3** gracias a la cual sabemos que  $n$  soluciones a la [EH] forman una base de soluciones para ésta si al evaluar su Wronskiano en cualquier punto, éste es distinto de cero. En particular, podemos evaluarlo en  $t = 0$ , lo cual nos facilitará los cálculos.

Por lo tanto, evaluando el Wronskiano en cero, obtendremos para cada uno de los casos respectivamente

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$

De esta forma comprobamos que las soluciones obtenidas mediante el polinomio característico forman siempre una base de soluciones a la [EH].

De hecho, al tratarse de una ecuación de segundo orden, el polinomio característico será de la forma  $P(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$  y sus raíces estarán dadas por la expresión

$$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}, \quad (2.19)$$

donde  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  son los coeficientes de la EDO. Por ello, sabemos que el primer caso se dará cuando  $a_1^2 < 4a_0a_2$ , el segundo cuando  $a_1^2 = 4a_0a_2$  y el tercero cuando  $a_1^2 > 4a_0a_2$ .

Si definimos  $j = \frac{a_1}{2a_0}$  y  $\nu = \frac{\sqrt{|a_1^2 - 4a_0a_2|}}{2a_0}$ , podemos reescribir las distintas bases de soluciones para cada caso como

$$\begin{aligned} \{e^{-jt} \sin(\nu t), e^{-jt} \cos(\nu t)\} & \text{ si } a_1^2 < 4a_0a_2 \\ \{e^{-jt}, te^{-jt}\} & \text{ si } a_1^2 = 4a_0a_2 \\ \{e^{-jt} e^{\nu t}, e^{-jt} e^{-\nu t}\} & \text{ si } a_1^2 > 4a_0a_2. \end{aligned}$$

De forma equivalente, también podemos expresar la base para el caso  $a_1^2 > 4a_0a_2$  en función de senos y cosenos hiperbólicos. Si  $u = e^{-jt} e^{\nu t}$  y  $v = e^{-jt} e^{-\nu t}$ , podemos formar una base mediante  $\hat{u} = \frac{u-v}{2}$  y  $\hat{v} = \frac{u+v}{2}$ , de forma que la nueva base estaría dada por

$$\{e^{-jt} \sinh(\nu t), e^{-jt} \cosh(\nu t)\},$$

que puede ser más cómoda para evaluar, especialmente en el cero.



Una vez hemos confirmado que nuestras soluciones forman una base, podemos utilizarlas no sólo para encontrar la única solución al PVI homogéneo de CI no nulas, sino también para encontrar la función de Green del PVI  $g(t, s) = \alpha(t - s)$ .

**Caso 1:**  $a_1^2 < 4a_0a_2$

Cualquier solución a la EDO homogénea estará dada por  $u(t) = c_1 e^{-jt} \sin(\nu t) + c_2 e^{-jt} \cos(\nu t)$ . Si ahora imponemos unas condiciones iniciales generales para  $t_0 = 0$  tal que  $u(0) = x_0$  y  $u'(0) = x_1$ , teniendo en cuenta que  $u'(t) = e^{-jt}(c_1 \nu \cos(\nu t) - c_2 \nu \sin(\nu t) - jc_1 \sin(\nu t) - jc_2 \cos(\nu t))$ , obtenemos

$$\begin{aligned} u(0) &= c_2 \\ u'(0) &= c_1 \nu - jc_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $c_2 = x_0$  y  $c_1 = \frac{jx_0 + x_1}{\nu}$ , luego

$$u_h(t) = \frac{e^{-jt}}{\nu} ((jx_0 + x_1) \sin(\nu t) + x_0 \nu \cos(\nu t))$$

es la única solución al PVI homogéneo de CI  $u(0) = x_0$  y  $u'(0) = x_1$ . Es más, si imponemos que  $u(0) = 0$  y  $u'(0) = \frac{1}{a_0}$ , entonces  $\alpha(t) = \frac{1}{a_0 \nu} e^{-jt} \sin(\nu t)$  y

$$g(t, s) = \alpha(t - s) = \frac{1}{a_0 \nu} e^{-j(t-s)} \sin(\nu(t-s))$$

es la Función de Green de este tipo de PVI.

**Caso 2:**  $a_1^2 = 4a_0a_2$

Cualquier solución a la EDO homogénea estará dada por  $u(t) = c_1 t e^{-jt} + c_2 e^{-jt}$ . Si ahora imponemos unas condiciones iniciales generales para  $t_0 = 0$  tal que  $u(0) = x_0$  y  $u'(0) = x_1$ , teniendo en cuenta que  $u'(t) = e^{-jt}(c_1 - jc_1 t - jc_2)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} u(0) &= c_2 \\ u'(0) &= c_1 - jc_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $c_2 = x_0$  y  $c_1 = rx_0 + x_1$ , luego

$$u_h(t) = e^{-jt} ((jx_0 + x_1)t + x_0)$$

es la única solución al PVI homogéneo de CI  $u(0) = x_0$  y  $u'(0) = x_1$ . Es más, si imponemos que  $u(0) = 0$  y  $u'(0) = \frac{1}{a_0}$ , entonces  $\alpha(t) = \frac{1}{a_0} e^{-jt} t$  y

$$g(t, s) = \alpha(t - s) = \frac{1}{a_0} e^{-j(t-s)} (t - s)$$

es la Función de Green de este tipo de PVI.

**Caso 3:**  $a_1^2 > 4a_0a_2$ 

Cualquier solución a la EDO homogénea estará dada por  $u(t) = c_1 e^{-jt} \sinh(\nu t) + c_2 e^{-jt} \cosh(\nu t)$ . Si ahora imponemos unas condiciones iniciales generales para  $t_0 = 0$  tal que  $u(0) = x_0$  y  $u'(0) = x_1$ , teniendo en cuenta que  $u'(t) = e^{-jt}(c_1 \nu \cosh(\nu t) + c_2 \nu \sinh(\nu t) - jc_1 \sinh(\nu t) - jc_2 \cosh(\nu t))$ , obtenemos

$$\begin{aligned} u(0) &= c_2 \\ u'(0) &= c_1 \nu - jc_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $c_2 = x_0$  y  $c_1 = \frac{jx_0 + x_1}{\nu}$ , luego

$$u_h(t) = \frac{e^{-jt}}{\nu} (jx_0 + x_1) \sinh(\nu t) + x_0 \nu \cosh(\nu t)$$

es la única solución al PVI homogéneo de CI  $u(0) = x_0$  y  $u'(0) = x_1$ . Es más, si imponemos que  $u(0) = 0$  y  $u'(0) = \frac{1}{a_0}$ , entonces  $\alpha(t) = \frac{1}{a_0 \nu} e^{-jt} \sinh(\nu t)$  y

$$g(t, s) = \alpha(t - s) = \frac{1}{a_0 \nu} e^{-j(t-s)} \sinh(\nu(t-s))$$

es la Función de Green de este tipo de PVI.

**2.5.2. Ecuaciones de cuarto orden**

En el caso de las ecuaciones de cuarto orden las posibles combinaciones de soluciones son 9:

- (i) Cuatro raíces reales distintas, por lo que una base de soluciones a la [EH] podría estar dada por  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $e^{\lambda_2 t}$ ,  $e^{\lambda_3 t}$ ,  $e^{\lambda_4 t}$ .
- (ii) Dos raíces reales distintas y una real doble, de manera que una base de soluciones a la [EH] podría estar dada por  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $e^{\lambda_2 t}$ ,  $e^{\lambda_3 t}$ ,  $te^{\lambda_3 t}$ .
- (iii) Una raíz real y una triple, por lo que una base de soluciones a la [EH] podría estar dada por  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $e^{\lambda_2 t}$ ,  $te^{\lambda_2 t}$ ,  $t^2 e^{\lambda_2 t}$ .
- (iv) Una raíz cuádruple, de forma que una base de soluciones a la [EH] podría estar dada por  $e^{\lambda t}$ ,  $te^{\lambda t}$ ,  $t^2 e^{\lambda t}$ ,  $t^3 e^{\lambda t}$ .
- (v) Dos raíces dobles distintas, así, una base de soluciones a la [EH] podría estar dada por  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $te^{\lambda_1 t}$ ,  $e^{\lambda_2 t}$ ,  $te^{\lambda_2 t}$ .
- (vi) Dos raíces complejas conjugadas y dos reales distintas, por lo tanto una base de soluciones a la [EH] podría estar dada por  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $e^{\lambda_2 t}$ ,  $e^{at} \sin(bt)$ ,  $e^{at} \cos(bt)$ .



- (vii) Dos raíces complejas conjugadas y una real doble, de manera que una base de soluciones a la [EH] podría estar dada por  $e^{\lambda t}$ ,  $te^{\lambda t}$ ,  $e^{at} \sin(bt)$ ,  $e^{at} \cos(bt)$ .
- (viii) Dos raíces complejas conjugadas dobles, por lo que una base de soluciones a la [EH] podría estar dada por  $e^{at} \sin(bt)$ ,  $e^{at} \cos(bt)$ ,  $te^{at} \sin(bt)$ ,  $te^{at} \cos(bt)$ .
- (ix) Dos raíces complejas distintas y sus conjugadas, de forma que una base de soluciones a la [EH] podría estar dada por  $e^{at} \sin(bt)$ ,  $e^{at} \cos(bt)$ ,  $e^{ct} \sin(dt)$ ,  $e^{ct} \cos(dt)$ .

Para demostrar que efectivamente estas soluciones forman una base evaluamos su Wronskiano en cero y obtenemos para cada uno de los casos respectivamente

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} = (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0, \\
 & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & 2\lambda_3 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & 3\lambda_3^2 \end{vmatrix} = -(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_1 - \lambda_3) \neq 0, \\
 & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2 & 2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & 3\lambda_2^2 & 6\lambda_2 \end{vmatrix} = -2(\lambda_1 - \lambda_2)^3 \neq 0, \\
 & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 2 & 0 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 6\lambda_1 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0, \\
 & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_1 & 2\lambda_2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_2^2 \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2)^4 \neq 0, \\
 & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & a & b \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & a^2 - b^2 & 2ab \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & a^3 - 3ab^2 & 3a^2b - b^3 \end{vmatrix} = \frac{-b((\lambda_2 - a)^2 + b^2)}{((\lambda_1 - a)^2 + b^2)(\lambda_1 - \lambda_2)} \neq 0, \\
 & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & a & b \\ \lambda^2 & 2\lambda & a^2 - b^2 & 2ab \\ \lambda^3 & 3\lambda^2 & a^3 - 3ab^2 & 3a^2b - b^3 \end{vmatrix} = b((\lambda - a)^2 + b^2)^2 \neq 0, \\
 & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 0 \\ a^2 - b^2 & 2ab & 2a & 2b \\ a^3 - 3ab^2 & 3a^2b - b^3 & 3(a^2 - b^2) & 6ab \end{vmatrix} = 4b^4 \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \\ a^2 - b^2 & 2ab & c^2 - d^2 & 2cd \\ a^3 - 3ab^2 & 3a^2b - b^3 & c^3 - 3cd & 3c^2d - d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ((a-c)^2 + (b+d)^2)d \\ ((a-c)^2 + (b-d)^2)b \end{vmatrix} \neq 0,$$

De esta forma comprobamos que las soluciones obtenidas mediante el polinomio característico forman siempre una base de soluciones a la [EH].

Llegados a este punto nos centraremos sólo en las diferentes raíces de un polinomio bicuadrado de la forma  $P(x) = x^4 + px^2 + r$ . Como vemos, se trata de un polinomio explícito, lo cual nos facilitará el trabajo a la hora de relacionar los coeficientes de la EDO con las distintas bases. Sin embargo, tendremos que tener en cuenta que dichos coeficientes son los relativos a la EDO explícita.

Para mayor simplificación tomaremos  $r \geq 0$  dado que será el correspondiente a los problemas que estudiaremos más adelante. En este tipo de polinomios nos encontraremos todos los casos descritos anteriormente excepto el (iii), debido a su falta de simetría, y el (vi), dado que no permitimos que  $r$  tome valores negativos.

Al igual que hemos realizado en el caso de segundo orden, ahora estudiaremos las diferentes relaciones entre los coeficientes del polinomio para en cada caso explicitar no sólo las bases de la ecuación homogénea, sino también la función de Green del PVI  $g(t, s) = \alpha(t - s)$ . En este caso no explicitaremos la única solución al PVI homogéneo con condiciones no nulas dado que será en los problemas de contorno cuando trabajar en cuarto orden cobrará más sentido.

Podemos utilizar  $y = x^2$  para crear un sistema de ecuaciones, de manera que, si tenemos en cuenta (2.19), es fácil comprobar que las raíces de nuestro polinomio estarán dadas por la expresión

$$\pm \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - r}}.$$

**Caso 1:**  $\frac{p^2}{4} > r$ ,  $r \neq 0$  y  $p > 0$

Para empezar observemos que la condición  $|\frac{p}{2}| > \sqrt{\frac{p^2}{4} - r}$  es equivalente a  $r \neq 0$ . En este caso obtendremos dos raíces complejas distintas y sus conjugadas, es decir, la combinación (ix). Tomando

$$\gamma = \sqrt{\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - r}} \quad y \quad \nu = \sqrt{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - r}},$$

nuestra base de soluciones estará dada por

$$\{\sin(\gamma t), \cos(\gamma t), \sin(\nu t), \cos(\nu t)\}.$$



Por lo tanto, cualquier solución a la EDO homogénea estará dada por  $u(t) = c_1 \sin(\gamma t) + c_2 \cos(\gamma t) + c_3 \sin(\nu t) + c_4 \cos(\nu t)$ . Ahora imponemos las condiciones iniciales necesarias para encontrar  $\alpha$ , esto es:  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$ ,  $u''(0) = 0$ ,  $u'''(0) = 1$ . Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} u'(t) &= c_1 \gamma \cos(\gamma t) - c_2 \gamma \sin(\gamma t) + c_3 \nu \cos(\nu t) - c_4 \nu \sin(\nu t) \\ u''(t) &= -c_1 \gamma^2 \sin(\gamma t) - c_2 \gamma^2 \cos(\gamma t) - c_3 \nu^2 \sin(\nu t) - c_4 \nu^2 \cos(\nu t) \\ u'''(t) &= -c_1 \gamma^3 \cos(\gamma t) + c_2 \gamma^3 \sin(\gamma t) - c_3 \nu^3 \cos(\nu t) + c_4 \nu^3 \sin(\nu t), \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} u(0) &= c_2 + c_4 = 0, & u'(0) &= c_1 \gamma + c_3 \nu = 0, \\ u''(0) &= -c_2 \gamma^2 - c_4 \nu^2 = 0, & u'''(0) &= -c_1 \gamma^3 - c_3 \nu^3 = 1. \end{aligned}$$

Así obtenemos dos sistemas de ecuaciones de dos incógnitas de donde sacamos que  $c_2 = c_4 = 0$ ,  $c_1 = \frac{1}{\gamma \nu^2 - \gamma^3}$  y  $c_3 = \frac{1}{\nu \gamma^2 - \nu^3}$ .

De este modo tenemos que  $\alpha(t) = \frac{1}{\gamma \nu^2 - \gamma^3} \sin(\gamma t) + \frac{1}{\nu \gamma^2 - \nu^3} \sin(\nu t)$ , por lo que la función de Green del PVI estará dada por

$$g(t, s) = \alpha(t - s) = \frac{1}{\gamma \nu^2 - \gamma^3} \sin(\gamma(t - s)) + \frac{1}{\nu \gamma^2 - \nu^3} \sin(\nu(t - s)).$$

**Caso 2:**  $\frac{p^2}{4} > r$ ,  $r \neq 0$  y  $p < 0$

En este caso obtendremos cuatro raíces reales distintas, es decir, la combinación (i). Tomando

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - r}}, \quad \lambda_2 = -\lambda_1, \quad \lambda_3 = \sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - r}} \quad \text{y} \quad \lambda_4 = -\lambda_3,$$

nuestra base de soluciones estará dada por  $\{e^{\lambda_1 t}, e^{-\lambda_1 t}, e^{\lambda_3 t}, e^{-\lambda_3 t}\}$ , o, equivalentemente, por

$$\{\sinh(\lambda_1 t), \cosh(\lambda_1 t), \sinh(\lambda_3 t), \cosh(\lambda_3 t)\}$$

Por lo tanto, cualquier solución a la EDO homogénea estará dada por  $u(t) = c_1 \sinh(\lambda_1 t) + c_2 \cosh(\lambda_1 t) + c_3 \sinh(\lambda_3 t) + c_4 \cosh(\lambda_3 t)$ . Ahora imponemos las condiciones iniciales necesarias para encontrar  $\alpha$ , esto es:  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$ ,  $u''(0) = 0$ ,  $u'''(0) = 1$ . Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} u'(t) &= c_1 \lambda_1 \cosh(\lambda_1 t) + c_2 \lambda_1 \sinh(\lambda_1 t) + c_3 \lambda_3 \cosh(\lambda_3 t) + c_4 \lambda_3 \sinh(\lambda_3 t) \\ u''(t) &= c_1 \lambda_1^2 \sinh(\lambda_1 t) + c_2 \lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 t) + c_3 \lambda_3^2 \sinh(\lambda_3 t) + c_4 \lambda_3^2 \cosh(\lambda_3 t) \\ u'''(t) &= c_1 \lambda_1^3 \cosh(\lambda_1 t) + c_2 \lambda_1^3 \sinh(\lambda_1 t) + c_3 \lambda_3^3 \cosh(\lambda_3 t) + c_4 \lambda_3^3 \sinh(\lambda_3 t), \end{aligned}$$



obtenemos

$$\begin{aligned} u(0) = c_2 + c_4 = 0, & \quad u'(0) = c_1\lambda_1 + c_3\lambda_3 = 0, \\ u''(0) = c_2\lambda_1^2 + c_4\lambda_3^2 = 0, & \quad u'''(0) = c_1\lambda_1^3 + c_3\lambda_3^3 = 1. \end{aligned}$$

Así obtenemos dos sistemas de ecuaciones de dos incógnitas y por tanto  $c_2 = c_4 = 0$ ,  $c_1 = \frac{1}{\lambda_1^3 - \lambda_1\lambda_3^2}$  y  $c_3 = \frac{1}{\lambda_3^3 - \lambda_3\lambda_1^2}$ .

De este modo tenemos que  $\alpha(t) = \frac{1}{\lambda_3^3 - \lambda_3\lambda_1^2} \sinh(\lambda_1 t) + \frac{1}{\lambda_1^3 - \lambda_1\lambda_3^2} \sinh(\lambda_3 t)$ , por lo que la función de Green del PVI estará dada por

$$g(t, s) = \alpha(t - s) = \frac{1}{\lambda_1^3 - \lambda_1\lambda_3^2} \sinh(\lambda_1(t - s)) + \frac{1}{\lambda_3^3 - \lambda_3\lambda_1^2} \sinh(\lambda_3(t - s)).$$

### Caso 3: $p > 0$ y $r = 0$

Notemos que este caso es equivalente al que cumple  $\frac{p^2}{4} > r$ ,  $|\frac{p}{2}| = \sqrt{\frac{p^2}{4} - r}$  y  $p > 0$ . Obtendremos una raíz real doble y dos complejas conjugadas, es decir, la combinación (vii). Tomando

$$\nu = \sqrt{p},$$

nuestra base de soluciones estará dada por

$$\{1, t, \sin(\nu t), \cos(\nu t)\}.$$

Por lo tanto, cualquier solución a la EDO homogénea estará dada por  $u(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \sin(\nu t) + c_4 \cos(\nu t)$ . Ahora impondremos las condiciones iniciales necesarias para encontrar  $\alpha$ , esto es:  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$ ,  $u''(0) = 0$ ,  $u'''(0) = 1$ . Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} u'(t) &= c_2 + c_3\nu \cos(\nu t) - c_4\nu \sin(\nu t) \\ u''(t) &= -c_3\nu^2 \sin(\nu t) - c_4\nu^2 \cos(\nu t) \\ u'''(t) &= -c_3\nu^3 \cos(\nu t) + c_4\nu^3 \sin(\nu t), \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} u(0) = c_1 + c_4 = 0, & \quad u'(0) = c_2 + c_3\nu = 0, \\ u''(0) = -c_4\nu^2 = 0, & \quad u'''(0) = -c_3\nu^3 = 1. \end{aligned}$$

Así obtenemos dos sistemas de ecuaciones de dos incógnitas de donde sacamos que  $c_1 = c_4 = 0$ ,  $c_2 = \frac{1}{\nu^2}$  y  $c_3 = -\frac{1}{\nu^3}$ .

De este modo tenemos que  $\alpha(t) = \frac{1}{\nu^2} t - \frac{1}{\nu^3} \sin(\nu t)$ , por lo que la función de Green del PVI estará dada por

$$g(t, s) = \alpha(t - s) = \frac{1}{\nu^2} (t - s) - \frac{1}{\nu^3} \sin(\nu(t - s)).$$



**Caso 4:**  $p < 0$  y  $r = 0$ 

Notemos que esta relación entre coeficientes es equivalente a  $\frac{p^2}{4} > r$ ,  $|\frac{p}{2}| = \sqrt{\frac{p^2}{4} - r}$  y  $p < 0$ . En este caso obtendremos tres raíces reales, una de ellas doble, es decir, la combinación **(ii)**. Tomando

$$\lambda_1 = \sqrt{p}, \quad \lambda_2 = -\lambda_1,$$

nuestra base de soluciones estará dada por  $\{1, t, e^{\lambda_1 t}, e^{-\lambda_1 t}\}$ , o, equivalentemente, por

$$\{1, t, \sinh(\lambda_1 t), \cosh(\lambda_1 t)\}.$$

Por lo tanto, cualquier solución a la EDO homogénea estará dada por  $u(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \sinh(\lambda_1 t) + c_4 \cosh(\lambda_1 t)$ . Ahora imponemos las condiciones iniciales necesarias para encontrar  $\alpha$ , esto es:  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$ ,  $u''(0) = 0$ ,  $u'''(0) = 1$ . Teniendo en cuenta que

$$u'(t) = c_2 + c_3 \lambda_1 \cosh(\lambda_1 t) + c_4 \lambda_1 \sinh(\lambda_1 t)$$

$$u''(t) = c_3 \lambda_1^2 \sinh(\lambda_1 t) + c_4 \lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 t)$$

$$u'''(t) = c_3 \lambda_1^3 \cosh(\lambda_1 t) + c_4 \lambda_1^3 \sinh(\lambda_1 t),$$

obtenemos

$$u(0) = c_1 + c_4 = 0, \quad u'(0) = c_2 + c_3 \lambda_1 = 0,$$

$$u''(0) = c_4 \lambda_1^2 = 0, \quad u'''(0) = c_3 \lambda_1^3 = 1.$$

Así obtenemos dos sistemas de ecuaciones y por tanto  $c_1 = c_4 = 0$ ,  $c_2 = -\frac{1}{\lambda_1^2}$  y  $c_3 = \frac{1}{\lambda_1^3}$ .

De este modo tenemos que  $\alpha(t) = -\frac{1}{\lambda_1^2} t + \frac{1}{\lambda_1^3} \sinh(\lambda_1 t)$ , por lo que la función de Green del PVI estará dada por

$$g(t, s) = \alpha(t - s) = -\frac{1}{\lambda_1^2} (t - s) + \frac{1}{\lambda_1^3} \sinh(\lambda_1 (t - s)).$$

**Caso 5:**  $p = r = 0$ 

En este caso obtendremos una raíz real cuádruple, es decir, la combinación **(iv)**. Como nuestra raíz será precisamente  $x = 0$ , la base de soluciones estará dada por

$$\{1, t, t^2, t^3\}.$$

Por lo tanto, cualquier solución a la EDO homogénea estará dada por  $u(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3$ . Ahora imponemos las condiciones iniciales necesarias para encontrar

$\alpha$ , esto es:  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$ ,  $u''(0) = 0$ ,  $u'''(0) = 1$ . Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}u'(t) &= c_2 + 2c_3t + 3c_4t^2 \\u''(t) &= 2c_3 + 6c_4t \\u'''(t) &= 6c_4,\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}u(0) &= c_1 = 0, & u'(0) &= c_2 = 0, \\u''(0) &= 2c_3 = 0, & u'''(0) &= 6c_4 = 1.\end{aligned}$$

Así que  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  y  $c_4 = \frac{1}{6}$ .

De este modo tenemos que  $\alpha(t) = \frac{1}{6}t^3$ , por lo que la función de Green del PVI estará dada por

$$g(t, s) = \alpha(t - s) = \frac{1}{6}(t - s)^3.$$

**Caso 6:**  $\frac{p^2}{4} = r$  y  $p > 0$

En este caso obtendremos una raíz compleja y su conjugada, ambas dobles, es decir, la combinación (viii). Tomando

$$\nu = \sqrt{p},$$

nuestra base de soluciones estará dada por

$$\{\sin(\nu t), \cos(\nu t), t \sin(\nu t), t \cos(\nu t)\}.$$

Por lo tanto, cualquier solución a la EDO homogénea estará dada por  $u(t) = c_1 \sin(\nu t) + c_2 \cos(\nu t) + c_3 t \sin(\nu t) + c_4 t \cos(\nu t)$ . Ahora imponemos las condiciones iniciales necesarias para encontrar  $\alpha$ , esto es:  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$ ,  $u''(0) = 0$ ,  $u'''(0) = 1$ . Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}u'(t) &= c_1 \nu \cos(\nu t) - c_2 \nu \sin(\nu t) + c_3 (\sin(\nu t) + \nu t \cos(\nu t)) + c_4 (\cos(\nu t) - \nu t \sin(\nu t)) \\u''(t) &= -c_1 \nu^2 \sin(\nu t) - c_2 \nu^2 \cos(\nu t) + c_3 (2\nu \cos(\nu t) - \nu^2 t \sin(\nu t)) \\&\quad + c_4 (-2\nu \sin(\nu t) - \nu^2 t \cos(\nu t)) \\u'''(t) &= -c_1 \nu^3 \cos(\nu t) + c_2 \nu^3 \sin(\nu t) + c_3 (-3\nu^2 \sin(\nu t) - \nu^3 t \cos(\nu t)) \\&\quad + c_4 (-3\nu^2 \cos(\nu t) + \nu^3 t \sin(\nu t)),\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}u(0) &= c_2 = 0, & u'(0) &= c_1 \nu + c_4 = 0, \\u''(0) &= -c_2 \nu^2 + 2c_3 \nu = 0, & u'''(0) &= -c_1 \nu^3 - c_4 3\nu^2 = 1.\end{aligned}$$

Así obtenemos dos sistemas de ecuaciones de dos incógnitas de donde sacamos que  $c_2 = c_3 = 0$ ,  $c_1 = \frac{1}{2\nu^3}$  y  $c_4 = -\frac{1}{2\nu^2}$ .

De este modo tenemos que  $\alpha(t) = \frac{1}{2\nu^3} \sin(\nu t) - \frac{1}{2\nu^2} t \cos(\nu t)$ , por lo que la función de Green del PVI estará dada por

$$g(t, s) = \alpha(t - s) = \frac{1}{2\nu^3} \sin(\nu(t - s)) - \frac{1}{2\nu^2} (t - s) \cos(\nu(t - s)).$$

**Caso 7:**  $\frac{p^2}{4} = r$  y  $p < 0$

En este caso obtendremos dos raíces reales dobles, es decir, la combinación  $(\mathbf{v})$ . Tomando

$$\lambda_1 = \sqrt{p} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -\lambda_1$$

nuestra base de soluciones estará dada por  $\{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, e^{-\lambda_1 t}, te^{-\lambda_1 t}\}$ , o, equivalentemente, por

$$\{\sinh(\lambda_1 t), \cosh(\lambda_1 t), t\sinh(\lambda_1 t), t\cosh(\lambda_1 t)\}.$$

Por lo tanto, cualquier solución a la EDO homogénea estará dada por  $u(t) = c_1 \sinh(\lambda_1 t) + c_2 \cosh(\lambda_1 t) + c_3 t \sinh(\lambda_1 t) + c_4 t \cosh(\lambda_1 t)$ . Ahora imponemos las condiciones iniciales necesarias para encontrar  $\alpha$ , esto es:  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$ ,  $u''(0) = 0$ ,  $u'''(0) = 1$ . Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} u'(t) &= c_1 \lambda_1 \cosh(\lambda_1 t) + c_2 \lambda_1 \sinh(\lambda_1 t) + c_3 (\sinh(\lambda_1 t) + \lambda_1 t \cosh(\lambda_1 t)) \\ &\quad + c_4 (\cosh(\lambda_1 t) + \lambda_1 t \sinh(\lambda_1 t)) \\ u''(t) &= c_1 \lambda_1^2 \sinh(\lambda_1 t) + c_2 \lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 t) + c_3 (2\lambda_1 \cosh(\lambda_1 t) + \lambda_1^2 t \sinh(\lambda_1 t)) \\ &\quad + c_4 (2\lambda_1 \sinh(\lambda_1 t) + \lambda_1^2 t \cosh(\lambda_1 t)) \\ u'''(t) &= c_1 \lambda_1^3 \cosh(\lambda_1 t) + c_2 \lambda_1^3 \sinh(\lambda_1 t) + c_3 (3\lambda_1^2 \sinh(\lambda_1 t) + \lambda_1^3 t \cosh(\lambda_1 t)) \\ &\quad + c_4 (3\lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 t) + \lambda_1^3 t \sinh(\lambda_1 t)) \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} u(0) &= c_2 = 0, & u'(0) &= c_1 \lambda_1 + c_4 = 0, \\ u''(0) &= c_2 \lambda_1^2 + 2c_3 \lambda_1 = 0, & u'''(0) &= c_1 \lambda_1^3 + c_4 3\lambda_1^2 = 1. \end{aligned}$$

Así obtenemos dos sistemas de ecuaciones de dos incógnitas de donde sacamos que  $c_2 = c_3 = 0$ ,  $c_1 = -\frac{1}{2\lambda_1^3}$  y  $c_4 = \frac{1}{2\lambda_1^2}$ .

De este modo tenemos que  $\alpha(t) = -\frac{1}{2\lambda_1^3} \sinh(\lambda_1 t) + \frac{1}{2\lambda_1^2} t \cosh(\lambda_1 t)$ , por lo que la función de Green del PVI estará dada por

$$g(t, s) = \alpha(t - s) = -\frac{1}{2\lambda_1^3} \sinh(\lambda_1(t - s)) + \frac{1}{2\lambda_1^2} (t - s) \cosh(\lambda_1(t - s)).$$

**Caso 8:**  $\frac{p^2}{4} < r$

En este caso obtendremos dos raíces complejas distintas y sus conjugadas, es decir, la combinación **(ix)**. Tomando

$$\nu = \sqrt{\frac{p}{4} + \sqrt{\frac{r}{4}}}, \quad \lambda_1 = \sqrt{-\frac{p}{4} + \sqrt{\frac{r}{4}}} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -\lambda_1,$$

nuestra base de soluciones estará dada por

$$\{e^{\lambda_1 t} \sin(\nu t), e^{\lambda_1 t} \cos(\nu t), e^{-\lambda_1 t} \sin(\nu t), e^{-\lambda_1 t} \cos(\nu t)\},$$

o, equivalentemente, por

$$\{\sinh(\lambda_1 t) \sin(\nu t), \sinh(\lambda_1 t) \cos(\nu t), \cosh(\lambda_1 t) \sin(\nu t), \cosh(\lambda_1 t) \cos(\nu t)\}.$$

Por lo tanto, cualquier solución a la EDO homogénea estará dada por

$$u(t) = c_1 \sinh(\lambda_1 t) \sin(\nu t) + c_2 \sinh(\lambda_1 t) \cos(\nu t) + c_3 \cosh(\lambda_1 t) \sin(\nu t) + c_4 \cosh(\lambda_1 t) \cos(\nu t).$$

Ahora imponemos las condiciones iniciales necesarias para encontrar  $\alpha$ , esto es:  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$ ,  $u''(0) = 0$ ,  $u'''(0) = 1$ . Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} u'(t) &= c_1(\lambda_1 \cosh(\lambda_1 t) \sin(\nu t) + \nu \sinh(\lambda_1 t) \cos(\nu t)) + c_2(\lambda_1 \cosh(\lambda_1 t) \cos(\nu t) \\ &\quad - \nu \sinh(\lambda_1 t) \sin(\nu t)) + c_3(\lambda_1 \sinh(\lambda_1 t) \sin(\nu t) + \nu \cosh(\lambda_1 t) \cos(\nu t)) \\ &\quad + c_4(\lambda_1 \sinh(\lambda_1 t) \cos(\nu t) - \nu \cosh(\lambda_1 t) \sin(\nu t)) \\ u''(t) &= c_1((\lambda_1^2 - \nu^2) \sinh(\lambda_1 t) \sin(\nu t) + 2\lambda_1 \nu \cosh(\lambda_1 t) \cos(\nu t)) \\ &\quad + c_2((\lambda_1^2 - \nu^2) \sinh(\lambda_1 t) \cos(\nu t) - 2\lambda_1 \nu \cosh(\lambda_1 t) \sin(\nu t)) \\ &\quad + c_3((\lambda_1^2 - \nu^2) \cosh(\lambda_1 t) \sin(\nu t) + 2\lambda_1 \nu \sinh(\lambda_1 t) \cos(\nu t)) \\ &\quad + c_4((\lambda_1^2 - \nu^2) \cosh(\lambda_1 t) \cos(\nu t) - 2\lambda_1 \nu \sinh(\lambda_1 t) \sin(\nu t)) \\ u'''(t) &= c_1((\lambda_1^3 - 3\nu^2 \lambda_1) \cosh(\lambda_1 t) \sin(\nu t) + (3\lambda_1^2 \nu - \nu^3) \sinh(\lambda_1 t) \cos(\nu t)) \\ &\quad + c_2((\lambda_1^3 - 3\nu^2 \lambda_1) \cosh(\lambda_1 t) \cos(\nu t) + (\nu^3 - 3\lambda_1^2 \nu) \sinh(\lambda_1 t) \sin(\nu t)) \\ &\quad + c_3((\lambda_1^3 - 3\lambda_1 \nu^2) \sinh(\lambda_1 t) \sin(\nu t) + (3\lambda_1^2 \nu - \nu^3) \cosh(\lambda_1 t) \cos(\nu t)) \\ &\quad + c_4((\lambda_1^3 - 3\nu^2 \lambda_1) \sinh(\lambda_1 t) \cos(\nu t) + (\nu^3 - 3\lambda_1^2 \nu) \cosh(\lambda_1 t) \sin(\nu t)), \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} u(0) &= c_4 = 0, & u'(0) &= c_2 \lambda_1 + c_3 \nu = 0, \\ u''(0) &= c_1 2\nu \lambda_1 + c_4(\lambda_1^2 - \nu^2) = 0, & u'''(0) &= c_2(\lambda_1^3 - 3\nu^2 \lambda_1) + c_3(3\nu \lambda_1^2 - \nu^3) = 1. \end{aligned}$$

Así obtenemos dos sistemas de ecuaciones de dos incógnitas de donde sacamos que  $c_1 = c_4 = 0$ ,  $c_2 = -\frac{1}{2\lambda_1^3 + 2\nu^2 \lambda_1}$  y  $c_3 = \frac{1}{2\nu \lambda_1^2 + 2\nu^3}$ .



De este modo tenemos  $\alpha(t) = -\frac{1}{2\lambda_1^3 + 2\nu^2\lambda_1}\sinh(\lambda_1 t)\cos(\nu t) + \frac{1}{2\nu\lambda_1^2 + 2\nu^3}\cosh(\lambda_1 t)\sin(\nu t)$ , por lo que la función de Green del PVI estará dada por

$$g(t, s) = \alpha(t - s) = -\frac{1}{2\lambda_1^3 + 2\nu^2\lambda_1}\sinh(\lambda_1(t - s))\cos(\nu(t - s)) \\ + \frac{1}{2\nu\lambda_1^2 + 2\nu^3}\cosh(\lambda_1(t - s))\sin(\nu(t - s)).$$

De esta forma y siguiendo la fórmula de Lagrange podremos expresar la única solución  $u(t)$  a cualquier PVI como la superposición de la única solución al homogéneo con CI no nulas y la única solución al PVI no homogéneo con CI nulas, es decir,

$$u(t) = u_h(t) + \int_{t_0}^t g(t, s)f(s)ds,$$

donde  $f \in \mathcal{C}(I)$  es la excitación externa que se aplica en  $t_0$  y  $u_h(t)$  es la única solución al [PH] con CI no nulas.

No debemos olvidar que resolver el sistema ha resultado más simple gracias a tener en cuenta que al tratarse de una EDO de coeficientes constantes, podemos obtener la solución del [PH] para  $t_0 = 0$  y luego desplazarla en el tiempo para hallar la solución a nuestro problema completo. De hecho, la solución a nuestro problema dependerá exclusivamente de la diferencia entre argumentos.

Esta característica cobra pleno sentido si pensamos que un sistema físico cuyas propiedades se modelan mediante coeficientes constantes, es invariante en el tiempo. Es por ello que no importa cuándo actuemos sobre él, siempre tendrá la misma respuesta. Consecuentemente, el estado del sistema en un instante de tiempo dado dependerá solamente del tiempo transcurrido desde que lo hemos excitado y no del instante de tiempo escogido en sí.

## Capítulo 3

# Teoría general de los Problemas de Contorno

El PVI estudia, mediante una EDO lineal y unas CI, procesos unidimensionales de evolución, es decir, dependientes del tiempo. Sin embargo, si imponemos ahora unas condiciones de contorno -o CC- en lugar de las iniciales, podremos estudiar procesos estacionarios unidimensionales mediante lo que llamamos un Problema de Contorno. En estos procesos la dimensión pasa a ser espacial, por lo que no hay evolución en el tiempo, de ahí que sean estacionarios.

En la naturaleza encontramos numerosos fenómenos físicos que son susceptibles de ser modelados mediante Problemas de Contorno unidimensionales. Desde la distribución de calor en alambres, hasta la deformación en vigas, pasando por el potencial eléctrico a lo largo de un cable.

Las condiciones de contorno son más restrictivas que las iniciales, pues imponen ciertas condiciones en ambos extremos del intervalo, y no sólo en uno. Es por ello que, mientras que en el PVI siempre tendremos existencia y unicidad de soluciones, en el Problema de Contorno nos encontraremos con las mismas situaciones que en la resolución de ecuaciones lineales algebraicas, es decir, el problema puede ser compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible, puesto que existirán condiciones que el sistema no será capaz de satisfacer.

### 3.1. Teoría General

Consideremos un intervalo cerrado y acotado de  $\mathbb{R}$  que denotaremos  $[0, l]$  y las funciones continuas  $a_0, \dots, a_n, f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  que cumplen  $a_0(x) \neq 0 \ \forall x \in [0, l]$ . Dada una

ecuación lineal de orden  $n$

$$a_0(x)u^n(x) + a_1(x)u^{n-1}(x) + \cdots + a_n(x)u(x) = f(x), \quad (3.1)$$

definiremos como *Condición de Contorno* en el intervalo  $[0, l]$  a la combinación lineal de  $u \in \mathcal{C}^n([0, l])$  y sus derivadas hasta el orden  $n-1$ , evaluadas en los extremos del intervalo, es decir:

$$b_1u(0) + \cdots + b_nu^{n-1}(0) + c_1u(l) + \cdots + c_nu^{n-1}(l) = \alpha,$$

donde  $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n, \alpha \in \mathbb{R}$ . Como ya hemos visto, la solución general de una ecuación diferencial de orden  $n$ , dependerá de  $n$  constantes que determinaremos unívocamente imponiendo cierto número de CC.

Por lo tanto, para enunciar el Problema de Contorno, además de la EDO (3.1), deberemos imponer  $m \geq 1$  CC, de la forma:

$$\begin{aligned} b_{11}u(0) + \cdots + b_{1n}u^{n-1}(0) + c_{11}u(l) + \cdots + c_{1n}u^{n-1}(l) &= \alpha_1 \\ &\vdots \\ b_{m1}u(0) + \cdots + b_{mn}u^{n-1}(0) + c_{m1}u(l) + \cdots + c_{mn}u^{n-1}(l) &= \alpha_m, \end{aligned}$$

donde  $b_{ij}, c_{ij}, \alpha_i \in \mathbb{R}$  con  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 0, \dots, n$ .

Ahora estamos en disposición de definir la matriz de coeficientes  $[B, C]$  donde  $B = (b_{ij})$  y  $C = (c_{ij})$ , de forma que

$$[B, C] = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

También podemos expresar la EDO y cada CC utilizando los siguientes operadores:

$$\begin{aligned} L(u) &= a_0u^n + a_1u^{n-1} + \cdots + a_nu \\ U_i(u) &= b_{i1}u(0) + \cdots + b_{in}u^{n-1}(0) + c_{i1}u(l) + \cdots + c_{in}u^{n-1}(l), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Como más de una condición de contorno linealmente dependiente no aporta información adicional, asumiremos que  $U_1, \dots, U_m$  son linealmente independientes. Si definimos la aplicación lineal  $\mathcal{U} : \mathcal{C}^n([0, l]) \rightarrow \mathbb{R}^m$  como la dada por  $\mathcal{U}(u) = (U_1(u), \dots, U_m(u))$ , entonces que las CC sean linealmente independientes es equivalente a que  $\mathcal{U}$  sea sobreyectiva, lo cual implica que  $\text{Im} \mathcal{U} = \mathbb{R}^m$  y que para cada  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$  existe  $u \in \mathcal{C}^n([0, l])$  tal que  $U_i(u) = \alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Como la sobreyectividad de  $\mathcal{U}$  es equivalente a la sobreyectividad de la aplicación lineal determinada por la matriz  $[B, C]$ , las CC son linealmente independientes sii  $\text{rg}[B, C] = m$ . Por ello, el número máximo de condiciones linealmente independientes que pueden considerarse para un operador diferencial de orden  $n$  es  $2n$ .

Teniendo todo esto en cuenta, podemos definir el *Problema de Contorno* o [PC]-de orden  $n$  en el intervalo  $[0, l]$  que denominaremos como [PC]. Fijadas las funciones



$a_0, \dots, a_n \in \mathcal{C}([0, l])$  tal que  $a_0(x) \neq 0 \forall x \in [0, l]$  y las matrices de orden  $m \times n$   $B = (b_{ij})$ ,  $C = (c_{ij}) \mid \text{rg}[B, C] = m$ . Determinar para cada  $f \in \mathcal{C}([0, l])$  y cada  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  si existe  $u \in \mathcal{C}^n([0, l])$  que satisface

$$L(u) = f, \quad U_1(u) = \alpha_1, \dots, U_m(u) = \alpha_m. \quad (3.2)$$

El operador diferencial  $L$  y la matriz  $[B, C]$  representarían las características de un determinado sistema físico, mientras que la solución al [PC] representa la respuesta de dicho sistema a las acciones externas descritas por la función  $f$ , si son aplicadas en el interior del sistema, y por los escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ , si lo son en el contorno.

Es por ello que para modelar un sistema al que no se le aplican acciones externas debemos definir el *Problema Homogéneo* asociado -o [PH]-, que consiste en determinar si existe  $u \in \mathcal{C}^n([0, l])$  que satisfaga

$$L(u) = 0, \quad U_1(u) = \dots = U_m(u) = 0. \quad (3.3)$$

Cabe destacar que el [PH] siempre tiene solución porque al menos la función nula verifica las ecuaciones.

Esta definición viene motivada por las mismas razones que en el PVI. Al tratarse de un problema lineal podemos aplicar el ya mencionado principio de superposición y así obtener una solución al [PH] mediante la resta de dos soluciones al [PC] o una nueva solución al [PC] sumando a una solución ( $u_p$ ) del problema de contorno completo cualquier solución al homogéneo asociado. Además, teniendo en cuenta que el conjunto de soluciones al [PH] forma un subespacio vectorial que denotaremos  $S$ , podemos reexpresar la afirmación anterior de manera que el espacio vectorial de las soluciones al Problema de Contorno queda dado por  $S + u_p$ . Observemos que si  $S = \{0\}$ , esto es, si la única solución al problema homogéneo es la nula; entonces, si el [PC] tiene solución, ésta es única. Cuando  $S = \{0\}$  diremos que se trata de un problema *regular*.

Físicamente, las soluciones al problema homogéneo representan las respuestas propias del sistema, es decir, las respuestas que corresponden a los estados naturales de equilibrio del sistema. Por lo tanto, que  $S \neq \{0\}$  implica que pueden existir estados de equilibrio naturales no triviales. En estos casos, si para una excitación externa existe una solución, entonces existen infinitas soluciones, dado que existen infinitas combinaciones lineales que pertenecen a  $S$ .

Sean  $u_1, \dots, u_n$  base de soluciones de la ecuación homogénea  $L(u) = 0$  y  $u_p$  una solución particular a  $L(u) = f$  obtenida, por ejemplo, aplicando el Método de Variación de Constantes. Entonces, las soluciones del [PC] se hallan entre las funciones descritas por la expresión

$$u(x) = u_p(x) + c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x)$$

con  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Para que una de tales soluciones sea solución de nuestro [PC], es necesario y suficiente que  $U_i(u) = \alpha_i \forall i = 1, \dots, m$ . Equivalentemente,  $u$  es solución al



[PC] sii  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  son solución del sistema lineal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_1(u_1) & \cdots & U_1(u_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_m(u_1) & \cdots & U_m(u_n) \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_c = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 - U_1(u_p) \\ \vdots \\ \alpha_m - U_m(u_p) \end{pmatrix}}_b. \quad (3.4)$$

Nótese que el conjunto de soluciones del [PH] está dado por  $u(x) = c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x)$ , donde  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  satisfacen el sistema homogéneo asociado  $Mc = 0$ .

Esta forma de resolución nos permite separar las características del sistema físico, que estarían integradas en la matriz  $M$ , de las excitaciones externas, de cuya acción da cuenta el vector  $b$ . Además, nos permite reducir el análisis de resolubilidad de un problema de contorno al de un sistema lineal, de manera que el [PC] tiene solución sii el sistema lineal  $Mc = b$  es compatible. Como hemos expuesto en el apartado 1.1, si  $z$  es una solución al problema homogéneo tal que  $M^T z = 0$ , entonces tenemos que  $\text{Im} M = [\ker M^T]^\perp$ , por lo que resulta que el sistema es compatible sii

$$\langle b, z \rangle = 0 \quad \forall z \mid M^T z = 0. \quad (3.5)$$

Esta condición nos sirve para discriminar los datos  $f, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  para los cuales el [PC] tiene solución.

Por otro lado, como  $M$  es una matriz  $m \times n$ , puede identificarse con una aplicación lineal de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ , de forma que a cada valor de  $c$  le asocia un valor de  $b$ . Por lo tanto,  $n = \dim \ker M + \dim \text{Im} M$ , es decir,  $n = \dim S + \text{rg} M$ . Para que el [PC] presente unicidad de soluciones es necesario que  $S = \{0\}$ . Esto implica que  $\text{rg} M = n$  y, por tanto, que  $n \leq m \leq 2n$ .

Asimismo, si definimos la aplicación lineal  $\mathcal{U} : \mathcal{C}^n([0, l]) \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por la asignación  $\mathcal{U}(u) = (U_1(u), \dots, U_m(u))^T$ , entonces como las condiciones de contorno son linealmente independientes,  $\mathcal{U}$  es sobreyectiva. Es por ello que según  $u$  recorre las funciones de  $\mathcal{C}^n([0, l])$ ,  $b$  toma todos los valores de  $\mathbb{R}^m$ . Consecuentemente, si deseamos que el [PC] tenga solución para cada  $f \in \mathcal{C}^n([0, l]) \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ , entonces,  $\text{rg} M = m$  y, por tanto,  $m \leq n$ .

Resumiendo, si imponemos un número de condiciones de contorno linealmente independientes menor al orden del operador diferencial, obtendremos alguna solución para cualquier conjunto de acciones externas  $f, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ , pero no tendremos unicidad de soluciones; se tratará de un sistema indeterminado. En segundo lugar, si imponemos un número de condiciones de contorno linealmente independientes mayor al orden del operador diferencial, estaremos en condiciones de obtener unicidad de soluciones, pero sólo para ciertos datos, por lo que de ellos depende que tengamos un sistema incompatible o uno compatible.

Sin embargo, para el caso en el que  $m = n$ , es decir, en el que imponemos tantas CC como el orden del operador diferencial, podemos aspirar a conseguir existencia y

unicidad de soluciones para cualquier conjunto de datos  $f, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ . Esto quiere decir que si existe solución y ésta es única, existe para cualquier conjunto de acciones externas y además el [PH] tiene a la trivial como única solución. Equivalentemente, si para el sistema físico descrito por  $L$ ,  $B$  y  $C$ , el único estado de equilibrio en ausencia de acciones externas es el trivial, entonces para cada excitación el sistema presentará una única solución, y viceversa. Por esta razón, a partir de ahora siempre plantearemos problemas con tantas condiciones de contorno como el orden del operador diferencial.

El hecho de que las CC sean linealmente independientes permite reducir las acciones externas modeladas por  $f, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  a las acciones debidas a una única función  $\tilde{f}$ . Dados  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ , si existe  $u^* \in \mathcal{C}([0, l]) \mid U_j(u^*) = \alpha_j, j = 1, \dots, m$ , entonces, dada  $f \in \mathcal{C}([0, l])$ , el [PC] es equivalente al problema de contorno denominado *Semihomogéneo* -o [PS]-:

$$L(u) = \underbrace{f - L(u^*)}_{\tilde{f}}, \quad U_1(u) = \dots = U_n(u) = 0, \quad (3.6)$$

donde  $u$  es solución del [PS] sii  $u + u^*$  lo es del [PC]. De hecho, esta propiedad siempre se cumple dado que siempre existe tal función  $u^*$ , pues siempre podemos hallar un polinomio con las propiedades referidas, de manera que encontrar  $u^*$  se reduce a un problema de interpolación. Consecuentemente, a partir de ahora y para mayor simplificación, únicamente nos centraremos en el análisis de los [PS]. De esta forma, una vez encontremos una  $u$  que satisfaga el [PS], tan sólo nos faltaría encontrar una  $u^*$  que cumpla las condiciones de contorno para poder encontrar la solución al [PC] dada por  $u + u^*$ .

Debemos decir que si bien la teoría de problemas de contorno de segundo orden, y especialmente la correspondiente a condiciones separadas o de Sturm-Liouville que veremos más adelante, son un tópico tratado en casi todos los manuales básicos -por ejemplo, [7] y [8]-; es muy difícil encontrar una la simple mención a problemas de contorno de orden superior. Es por ello que hemos recurrido al planteamiento de [3], [6] y [9], que está basado en una reescritura crítica de los capítulos 7 y 11 de la excelente monografía [10].

## 3.2. Tratamiento variacional del Problema de Contorno Autoadjunto

Como hemos dicho, nuestro problema puede tratarse desde el álgebra lineal como un sistema de ecuaciones lineales. De modo análogo, podemos reescribir una EDO en función de una aplicación bilineal. En este caso además nos interesará que se trate de una aplicación bilineal simétrica definida positiva, de manera que su forma cuadrática asociada pueda representar un funcional de energía.

Para ello necesitaremos imponer que el problema sea *autoadjunto*. Un problema es autoadjunto si el operador diferencial asociado a él lo es, es decir, si satisface  $\int_0^l L(u)v = \int_0^l L(v)u$ , dado que algebraicamente un operador autoadjunto es precisamente aquel que



satisface  $\langle Av, u \rangle = \langle v, Au \rangle$ , donde  $A$  es la matriz que corresponde al operador, por lo que cumple  $A = A^T$ . Es por ello que, necesariamente, la aplicación bilineal asociada a un operador autoadjunto será simétrica.

Este tipo de operadores están relacionados con EDOs de orden par, en las que los coeficientes de las derivadas pares son una primitiva de los de las derivadas de un orden menor. De esta forma, consideraremos la EDO de orden  $n = 2m$  dada por

$$L(u) = (-1)^m (a_0 u^m)^m + (-1)^{m-1} (a_2 u^{m-1})^{m-1} + \dots + a_n u = f,$$

donde  $f \in \mathcal{C}([0, l])$  y  $a_0 \in \mathcal{C}^m([0, l])$ ,  $a_2 \in \mathcal{C}^{m-1}([0, l])$ ,  $\dots$ ,  $a_n \in \mathcal{C}([0, l])$  con  $a_0(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in [0, l]$ .

En esta ocasión ya no tratamos con un espacio vectorial finito, como hacíamos en el apartado 1.1, sino que estamos hablando del espacio de funciones  $\mathcal{C}([0, l])$ , cuyo producto interno, y por tanto el todos sus subespacios, definiremos como  $\langle f, v \rangle = \int_0^l f v$  con  $f, v \in \mathcal{C}([0, l])$ . Por ello, en lugar de multiplicar nuestro problema por una serie de cantidades indeterminadas, lo haremos por una función auxiliar  $v \in \mathcal{C}^n([0, l])$ ; y en vez de hacer un sumatorio, integraremos tal que

$$\int_0^l L(u) v = \int_0^l \left( (-1)^m (a_0 u^m)^m + (-1)^{m-1} (a_2 u^{m-1})^{m-1} + \dots + a_n u \right) v = \int_0^l f v. \quad (3.7)$$

Esta expresión constituye la *formulación débil* de nuestro problema, es decir, una formulación que impone sobre la solución unas condiciones de regularidad menores a las del problema completo. De esta forma, resolver el problema completo siempre implica resolver su formulación débil, mientras que la propiedad recíproca no se cumple a no ser de que se impongan unas condiciones de regularidad sobre la solución lo suficientemente estrictas.

Podemos integrar por partes en (3.7) de forma que si el operador es autoadjunto e imponemos que  $u$  y  $v$  cumplan unas CC homogéneas, que más tarde describiremos en función del orden del operador, entonces obtendremos:

$$\int_0^l \left( a_0 u^m v^m + a_2 u^{m-1} v^{m-1} + \dots + a_n u v \right) = \int_0^l f v. \quad (3.8)$$

Por lo tanto, nuestro problema será equivalente a buscar una función  $u$  con la regularidad requerida que satisfaga la anterior expresión (3.8).

En particular, si escogemos  $v$  de forma que sea una solución al [PH], el problema homogéneo será equivalente a buscar la  $v$  que satisfaga

$$\int_0^l \left( a_0 (v^m)^2 + a_1 (v^{m-1})^2 + \dots + a_n v^2 \right) = 0. \quad (3.9)$$

Por lo tanto, para asegurarnos de que tenemos unicidad de soluciones es necesario que la única solución de (3.9) sea la trivial.

Démosnos cuenta de que, gracias a que el operador es autoadjunto, la parte izquierda de la expresión anterior (3.8) puede expresarse tal y como queríamos, esto es, mediante una aplicación bilineal simétrica a la que denotaremos por  $b(u, v)$  y cuya forma cuadrática estará dada por  $q(v)$ , que se expresa como la parte izquierda de la expresión (3.9). Si además tomamos  $l(v)$  como la parte derecha de (3.8), podemos reexpresar la ecuación como

$$b(u, v) = l(v).$$

Finalmente, en el apartado **1.2.2** hemos demostrado que resolver esta igualdad resulta ser equivalente a hallar el mínimo del funcional de energía dado por

$$\min\{q(u) - 2l(u)\},$$

donde  $q(u)$  representará la energía interna del sistema y  $2l(u)$  la energía debida a la fuerza externa. Esta afirmación constituye precisamente el *principio de mínima acción*. Observemos que si la trivial no es la única solución a (3.9), entonces existirán elementos isótopos, por lo que podremos obtener tantos mínimos distintos de  $u$  como queramos.

### 3.3. Función de Green en el Problema de Contorno Regular

La función de Green de un Problema de Contorno tendrá características análogas a la función de Green para el PVI. Por un lado, volverá a actuar a modo de matriz inversa, de manera que dada una fuerza, la obtención de una solución a cierto problema regular sea directa. Además, también será la respuesta ante una acción concentrada, de forma que la solución ante una acción distribuida podrá expresarse como la suma de las respuestas a acciones concentradas. En definitiva, la *Función de Green del Problema de Contorno* será una función  $G : [0, l] \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, dado  $f \in \mathcal{C}([0, l])$ , la única solución al [PS] regular venga determinada por

$$u(x) = \int_0^l G(x, s) f(s) ds.$$

Para identificar la función que buscamos, partiremos de la definición de la Función de Green como respuesta ante una acción concentrada. Si tenemos un problema semihomogéneo regular de orden  $n$ , la Función de Green en  $s$ , a la que denotaremos por  $G_s(x)$ , será la única solución ante una acción concentrada en dicho punto. Concretamente,  $G_s(x)$  es la única solución al [PS]

$$a_0 G_s^{(n)} + a_1 G_s^{(n-1)} + \dots + a_n G_s = \delta_s, \quad U_1(G_s) = \dots = U_n(G_s) = 0.$$

Dado que se trata de un problema lineal y aplicando el principio de superposición,  $\sum_{j=1}^n G_{s_j} f(s_j)$  se trata de la respuesta del sistema ante acciones concentradas en los puntos  $s_1, \dots, s_n$  de magnitudes  $f(s_1), \dots, f(s_n)$ , respectivamente. Consideremos entonces



la función  $G : [0, l] \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $G(x, s) = G_s(x)$ , de forma que la respuesta ante una acción distribuida en el intervalo  $[0, l]$  con intensidad  $f$  estará dada por  $u(x) = \int_0^l G(x, s)f(s)ds$ .

Las referencias básicas en esta sección son [6] y [10].

### 3.3.1. Operador de Green de un Problema de Contorno

Dados  $a_0, \dots, a_n, f \in \mathcal{C}([0, l])$  con  $a_0(x) \neq 0 \forall x \in [0, l]$  y sea  $n \in \mathbb{N}^*$ , consideraremos el operador diferencial:

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}^n([0, l]) &\longrightarrow \mathcal{C}([0, l]) \\ u &\longmapsto a_0 u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_n u. \end{aligned}$$

Como señalamos en el caso del PVI, el hecho de que toda EDO de este tipo tenga al menos una solución implica que  $L$  es una aplicación lineal sobreyectiva. Consideremos también la aplicación  $\mathcal{U} : \mathcal{C}^n([0, l]) \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\mathcal{U}(u) = (U_1(u), \dots, U_n(u))^T$  donde  $U_1, \dots, U_n$  son  $n$  CC linealmente independientes. Ya hemos dicho que se trata también de una aplicación lineal sobreyectiva.

Tenemos, por tanto, que el espacio de soluciones al [PH]  $L(u) = 0$ ,  $U_1(u) = \dots = U_n(u) = 0$  está determinado por  $S = \text{Ker} L \cap \text{Ker} \mathcal{U}$ , con  $0 \leq \dim S \leq n$ . De ahora en adelante llamaremos  $\mathcal{V}$  a  $\text{Ker} L$  y consideraremos de nuevo el producto interno sobre  $\mathcal{C}([0, l])$ , y por tanto sobre todos sus subespacios, como  $\int_0^l u_1 u_2$  con  $u_1, u_2 \in \mathcal{C}([0, l])$ .

Como  $S$  es un subespacio de  $\mathcal{C}([0, l])$  de dimensión finita, podemos afirmar que  $\mathcal{C}([0, l]) = S \oplus S^\perp$ . Sabemos que  $S \subset \mathcal{V}$ , por lo que  $\mathcal{V} = S \oplus (\mathcal{V} \cap S^\perp)$ , donde  $\mathcal{V} \cap S^\perp$  define el subespacio de  $\mathcal{V}$  ortogonal a  $S$ .

Por otro lado, gracias a (3.5) sabemos que siempre que el término de fuerza sea ortogonal al conjunto de soluciones del [PH] tendremos por lo menos una solución al [PS], es decir,  $L : \mathcal{V} \rightarrow S^\perp$  será una aplicación sobreyectiva. El *operador de Green del problema [PS]*  $\mathcal{G} : \mathcal{C}([0, l]) \rightarrow \mathcal{V}$  es un operador integral cuyo núcleo es la función de Green, tal que su restricción a  $S^\perp$  es precisamente un inverso por la derecha del operador  $L$ , de manera que satisface  $L \circ \mathcal{G} = \text{Id}_{S^\perp}$ . Por lo tanto, que  $L$  sea sobreyectiva y que  $\mathcal{G}$  sea su inversa implica que si  $f \in S^\perp$ , entonces  $u = \mathcal{G}(f)$  es solución del problema de contorno semihomogéneo  $L(u) = f$ ,  $U_1(u) = \dots = U_n(u) = 0$ .

De esta forma, si  $G$  es una función de Green de [PS], entonces la asignación

$$\mathcal{G}(f)(x) = \int_0^l G(x, s)f(s)ds$$

determina un operador integral con núcleo  $G$  para cada  $f \in \mathcal{C}([0, l])$ .

Cabe destacar que si el operador diferencial  $L$  es autoadjunto, dadas  $f, g \in S^\perp$ , y considerando  $u = \mathcal{G}(f)$  y  $w = \mathcal{G}(g)$  como una solución al [PS] con dato  $f$  y  $g$  respectivamente, entonces se cumple

$$\int_0^l f \mathcal{G}(g) = \int_0^l L(u)w = \int_0^l uL(w) = \int_0^l \mathcal{G}(f)g.$$

Por lo tanto, diremos que el operador de Green es autoadjunto si satisface  $\int_0^l f \mathcal{G}(g) = \int_0^l \mathcal{G}(f)g \ \forall f, g \in \mathcal{C}([0, l])$ , es decir, si es un operador autoadjunto para el producto escalar definido. Además, como  $G$  es el núcleo del operador de Green, resulta que si  $\mathcal{G}$  es autoadjunto, entonces  $G$  es simétrico, esto es  $G(x, s) = G(s, x) \ \forall x, s \in [0, l]$ .

Dado un problema semihomogéneo regular tal que  $S^\perp = \mathcal{C}([0, l])$ , el operador  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}([0, l])$  es un isomorfismo por lo que sólo existe un único operador  $\mathcal{G}$ , que es precisamente el inverso de  $L$ , con un único núcleo  $G$ . Además, si el operador es autoadjunto, dicho núcleo será necesariamente simétrico.





## Capítulo 4

# Problema de Contorno regular de segundo orden

### 4.1. Condiciones de Contorno

Dado que para implementar nuestras ecuaciones diferenciales debemos acotarlas a un dominio, las Condiciones de Contorno serán necesarias para dar cuenta del entorno del que hemos aislado nuestro dominio y así poder obtener un problema bien planteado. Por ello, vamos a definir los tipos de condiciones de contorno con significado físico, es decir, aquéllos que permiten representar acciones impuestas en el contorno del sistema.

Para comprender el motivo de las definiciones siguientes deberemos recurrir a la formulación débil de nuestro problema. Según ella, la EDO de segundo orden autoadjunta  $-(au')' + qu = f$  sería equivalente a

$$\int_0^l v \left( -(au')' + qu \right) = \int_0^l f v, \forall v \in \mathcal{C}^2([0, l]).$$

Si desarrollamos ésta última igualdad obtenemos, mediante la integración por partes,

$$\int_0^l (au'v' + quv) - v(l)(au')(l) + v(0)(au')(0) = \int_0^l f v.$$

Definiremos las *Condiciones de Contorno de Dirichlet* como las dadas por

$$U_1^D(u) = u(0) \quad \text{y} \quad U_2^D(u) = u(l),$$

de manera que si seleccionamos  $v$  de forma que cumpla las CC homogéneas, nuestro problema se reduce a encontrar una  $u$  que satisfaga  $\int_0^l (au'v' + quv) = \int_0^l f v$ ; o, equivalentemente, a encontrar una  $u$  que minimice su funcional de energía asociado. Por ello,

llamaremos *Condición de Contorno Esencial* a la dada por

$$c_1 U_1^D + c_2 U_2^D = 0, \text{ con } |c_1| + |c_2| > 0.$$

Por la misma razón, definiremos las *Condiciones de Contorno de Neumann* como

$$U_1(u) = u'(0) \quad \text{y} \quad U_2(u) = u'(l),$$

de manera que si  $u$  cumple las Condiciones de Neumann homogéneas, podemos expresar nuestro problema mediante una bilineal simétrica.

Por otro lado, con el objetivo de poder modelizar un mayor número de situaciones físicas que se pueden dar en los contornos de nuestros problemas, introduciremos en la formulación débil del problema, el elemento adicional simétrico  $k_1 u(0)v(0) - k_1 u(0)v(l) + k_2 u(l)v(l) - k_2 u(l)v(0)$ , sin que se deje de cumplir la igualdad. De este modo obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^l (au'v' + quv) + k_1 u(0)v(0) + k_2 u(l)v(l) - v(l)((au')(l) + k_2 u(l)) \\ + v(0)((au')(0) - k_1 u(0)) = \int_0^l f v. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Este desarrollo motiva la definición de las *Condiciones de Contorno de Robin*:

$$U_1^R(u) = k_1 u(0) - a(0)u'(0) \quad \text{y} \quad U_2^R(u) = k_2 u(l) + a(l)u'(l),$$

donde  $a$  es el coeficiente principal<sup>1</sup> del operador diferencial al que están asociadas y  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  son normalmente mayores o iguales a cero debido a su naturaleza física. Como en los casos anteriores, cuando las Condiciones de Robin homogéneas se cumplan, nos quedaremos tan sólo con la bilineal simétrica  $\int_0^l (au'v' + quv) + k_1 u(0)v(0) + k_2 u(l)v(l)$ , que estará asociada a un funcional de energía. En este caso, ésta tiene dos elementos más pues al variar la formulación débil utilizando una expresión nula, lo que hemos hecho ha sido introducir en nuestro sistema físico un elemento en equilibrio energético del que toma cuenta en la bilineal del nuevo problema. Por ello, denominaremos *Condición Natural* a

$$c_1 U_1^R + c_2 U_2^R = 0, \text{ con } |c_1| + |c_2| > 0.$$

Observemos que, en particular, si  $k_1 = k_2 = 0$ , las Condiciones de Robin son equivalentes a las de Neumann. Si combinamos unas con otras obtenemos las Condiciones Mixtas Dirichlet-Robin:

$$U_1 = u(0) \text{ y } U_2(u) = ku(l) + a(l)u'(l) \quad \text{ó} \quad U_1(u) = ku(0) - a(0)u'(0) \text{ y } U_2(u) = u(l),$$

donde  $k \geq 0$ . Si, en particular,  $k = 0$ , entonces obtenemos las Condiciones Mixtas Dirichlet-Neumann:

$$U_1 = u(0) \text{ y } U_2(u) = a(l)u'(l) \quad \text{ó} \quad U_1(u) = -a(0)u'(0) \text{ y } U_2(u) = u(l).$$

---

<sup>1</sup>Coeficiente asociado a la derivada de orden mayor. Anteriormente lo hemos denotado como  $a_0$ .

Desde el punto de vista físico tiene sentido unificar las Condiciones de Robin y Neumann. Esto es debido a que los coeficientes  $k_1$  y  $k_2$  modelan propiedades de los sistemas en los extremos. Si éstos toman valores como el cero y el infinito, estaremos simplificando el problema físico y convirtiéndolo en uno ideal.

Pongamos como ejemplo la conductividad de calor a lo largo de un alambre. Las condiciones de contorno de Robin harían referencia a la transmisión de calor en los extremos del mismo, por lo que si  $k_1 = 0$  estaríamos hablando de que el alambre está en contacto, en el extremo izquierdo, con un medio de conductividad nula -o aislante-. Si, por otro lado,  $k_1 \rightarrow \infty$ , estaríamos ante un conductor ideal. Otro ejemplo puede estar relacionado con las flexiones longitudinales en barras. En este caso la barra estaría agarrada, en los extremos, por muelles de rigidez  $k_1$  y  $k_2$ . Que la rigidez sea nula representa que los extremos están libres, mientras que una rigidez infinita implica que están fijos.

Desde el punto de vista matemático, las CC anteriormente mencionadas pueden expresarse mediante la denominación genérica de CC del tipo Sturm-Liouville, es decir,

$$U_1(u) = \alpha u(0) + \beta u'(0) \quad \text{y} \quad U_2(u) = \gamma u(l) + \delta u'(l), \quad \text{con } (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) > 0.$$

La expresión  $(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) > 0$  únicamente indica que ni  $\alpha$  y  $\beta$  ni  $\gamma$  y  $\delta$  pueden anularse a la vez. Observemos que se tratan de condiciones de contorno *separadas*, es decir, cada una de las condiciones de contorno hará referencia a uno de los extremos, por lo que nunca tendremos en una misma condición de contorno la función o sus derivadas evaluadas en ambos extremos del intervalo.

Cabe destacar que las CC de Sturm-Liouville no hacen referencia a ningún operador diferencial en concreto y pueden ser equivalentes a cualquiera de los cuatro tipos que acabamos de mencionar, que, en cambio, sí que pueden estar asociados algún operador. Observemos, por ejemplo, que si  $\beta = 0$  entonces  $\alpha \neq 0$  y por tanto  $U_1$  es equivalente a una condición de Dirichlet. Por otro lado, si escogemos  $\alpha = k_1$  y  $\beta = -a(0)$ , entonces  $U_1$  es equivalente a la condición de Robin  $k_1 u(0) - a(0)u'(0)$ .

Tanto esta sección como la posterior se nutren del contenido de [9]. Sin embargo, la Teoría de Sturm-Liouville constituye un tópico habitual de la mayor parte de los manuales sobre ecuaciones diferenciales ordinarias. Los resultados de esta sección pueden, por tanto, encontrarse en varios textos, como por ejemplo [7], [8].

## 4.2. Problema Sturm-Liouville

El problema de contorno de segundo orden autoadjunto que analizaremos viene dado por la ecuación

$$-(au')' + qu = f,$$

donde  $a \in \mathcal{C}^1([0, l])$ ,  $q, f \in \mathcal{C}([0, l])$  y  $a(x) > 0$ ,  $\forall x \in [0, l]$ . Estos problemas son de especial interés en la física matemática debido a que representan la expresión equivalente al Laplaciano, pero en una dimensión.



Consideraremos las Condiciones de Contorno de Robin, Neumann, Dirichlet y Mixtas asociadas a este operador diferencial mediante la denominación genérica de CC del tipo Sturm-Liouville, es decir,

$$U_1(u) = \alpha u(0) + \beta u'(0) \quad \text{y} \quad U_2(u) = \gamma u(l) + \delta u'(l) \quad \text{con} \quad (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) > 0.$$

Si imponemos las CC del tipo Sturm-Liouville, entonces las matrices  $B$  y  $C$  quedan dadas por

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

de manera que  $\text{rg}[B, C] = \text{rg} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix} = 2.$

Intentaremos ahora estudiar la regularidad del [PS] dado por el operador diferencial  $L(u) = -(au')' + qu$  y las CC del tipo Sturm-Liouville. Nuestro objetivo será, por tanto, encontrar las acciones externas para las cuales el [PS] tiene solución. Para ello, sustituiremos la condición algebraica de resolubilidad (3.5), por otra en función de la excitación  $f$ .

Teniendo en cuenta que  $u, v \in \mathcal{C}^2([0, l])$  son soluciones al [PS] y al [PH], respectivamente, y transformando la expresión proveniente de la formulación débil  $\int_0^l L(u)v$  de forma que  $\int_0^l L(u)v = \int_0^l -[(au')'v + quv] = 2 - au'v|_0^l + \int_0^l au'v' + \int_0^l quv$ , obtenemos

$$\int_0^l L(u)v = -a(l)u'(l)v(l) + a(0)u'(0)v(0) + \int_0^l [quv + au'v'].$$

Esto implica que

$$\int_0^l L(u)v - \int_0^l L(v)u = \underbrace{a(l)[v'(l)u(l) - u'(l)v(l)] + a(0)[u'(0)v(0) - v'(0)u(0)]}_{B(u,v)}.$$

Si expresamos  $B(u, v)$  en función de las CC del tipo Sturm-Liouville, obtenemos

$$B(u, v) = \frac{a(0)}{\alpha^2 + \beta^2} [U_1(u)C_1(v) - U_1(v)C_1(u)] + \frac{a(l)}{\gamma^2 + \delta^2} [U_2(u)C_2(v) - U_2(v)C_2(u)], \quad (4.2)$$

donde  $C_1(u) = \beta u(0) - \alpha u'(0)$  y  $C_2(u) = \gamma u(l) - \delta u'(l)$ .

Como que el problema sea semihomogéneo implica  $U_1(u) = U_2(u) = U_1(v) = U_2(v) = 0$ , tenemos que  $B(u, v) = 0$  y, por tanto,  $\int_0^l L(u)v = \int_0^l L(v)u$ . De hecho, que se satisfaga la anterior propiedad de simetría es lo que define a los problemas autoadjuntos.

Es más, como  $u$  y  $v$  cumplen que  $L(u) = f$  y  $L(v) = 0$ , respectivamente, obtenemos que  $\int_0^l f v = \int_0^l L(u)v = \int_0^l L(v)u = 0$ . Por lo tanto, para que el [PS] tenga solución,  $f$  ha

---

<sup>2</sup>Integración por Partes

de cumplir

$$\int_0^l f v = 0.$$

Se trata de una condición necesaria debido al desarrollo mostrado, que además es análoga a la condición algebraica (3.5), siendo  $f$  el equivalente a  $b$  y  $v$  a  $z$ .

Es más, si ahora consideramos las condiciones  $U_1, U_2$  del tipo Sturm Liouville junto con  $C_1(v) = \beta v(0) - \alpha v'(0)$  y  $C_2(v) = \delta v(l) - \gamma v'(l)$ , entonces, la matriz  $K$  determinada por los coeficientes de las condiciones de contorno  $U_1, U_2, C_1, C_2$  queda dada por

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \\ \beta & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Observemos que se trata de una matriz invertible.

Denotemos con  $S$  el subespacio vectorial formado por las soluciones del problema homogéneo  $S = \{v \in \mathcal{C}^2([0, l]) : L(v) = 0, U_1(v) = U_2(v) = 0\}$ . Llamemos  $\mathcal{C}$  a la aplicación lineal  $\mathcal{C} : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\mathcal{C}(v) = (C_1(v), C_2(v))$ . Si  $v \in S$ , se cumple que

$$K \begin{pmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ v(l) \\ v'(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(v) \\ U_2(v) \\ C_1(v) \\ C_2(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $K$  es invertible, necesariamente  $v(0) = v'(0) = 0$ , cosa que, dado el teorema de existencia y unicidad de soluciones del PVI, implica  $v = 0$ . De este modo, sabemos que  $\mathcal{C}$  se trata de una aplicación lineal inyectiva entre espacios vectoriales de dimensión finita y se cumple que  $\dim \text{Im} \mathcal{C} = \dim S$ . Si tenemos en cuenta la matriz definida como  $M$  en (3.4), entonces podemos afirmar que  $\dim S = \dim \text{Ker} M$  y que  $\dim \text{Ker} M = \dim \text{Ker} M^T$ . En definitiva obtenemos que  $\dim \text{Im} \mathcal{C} = \dim \text{Ker} M^T$ .

Teniendo en cuenta la definición de  $B(u, v)$  dada en (4.2), tenemos que si  $v \in S$ , entonces

$$\begin{pmatrix} U_1(u_1) & U_2(u_1) \\ U_1(u_2) & U_2(u_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(v) \\ C_2(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto nos indica que  $\text{Im} \mathcal{C} \subset \text{Ker} M^T$ , por lo que ya podemos afirmar que  $\text{Im} \mathcal{C} = \text{Ker} M^T$  y expresar la condición de resolubilidad (3.5) como  $U_1(u_p)C_1(v) + U_2(u_p)C_2(v) = 0 \forall v \in S$ . Es decir, ahora ya podemos afirmar que la condición necesaria y suficiente para que el problema de contorno tenga solución es que  $\int_0^l f v = 0, \forall v \in S$ .

Como ya hemos visto, que el [PH] tenga como única solución la trivial implica que  $\dim S = 0$ . En este caso, la condición  $\int_0^l f v = 0$  se satisface para todo  $f \in \mathcal{C}([0, l])$ , lo que implica que el [PS] siempre tiene solución y que ésta es única, independientemente del dato  $f$ .

Podemos resumir todos los resultados obtenidos en el *Teorema de Alternativa de Fredholm*. Dadas las CC  $U_1$  y  $U_2$  del tipo Sturm-Liouville, para que el [PS] dado por

$$-(au')' + qu = f, \quad U_1(u) = U_2(u) = 0,$$

tenga solución, es condición necesaria y suficiente que  $f$  satisfaga  $\int_0^l f v = 0 \forall v \in S$  donde  $S = \{v \in C^2([0, l]) : -(av')' + qv = 0, U_1(v) = U_2(v) = 0\}$ .

### 4.3. Tratamiento variacional del Problema Autoadjunto

Consideraremos  $u \in C^2([0, l])$  una solución al [PH]  $L(u) = -(au')' + qu = 0$ ,  $U_1(u) = U_2(u) = 0$ , donde  $a > 0$ ,  $U_1$  y  $U_2$  son condiciones de contorno de Robin, es decir,

$$U_1(u) = k_1 u(0) - a(0)u'(0) \quad \text{y} \quad U_2(u) = k_2 u(l) + a(l)u'(l), \quad \text{con } k_1, k_2 \geq 0.$$

Recordemos que si  $k_1$  y  $k_2$  tienden a infinito, entonces  $U_1$  y  $U_2$  serán equivalentes a las condiciones de Dirichlet, mientras que si  $k_1 = k_2 = 0$ , entonces  $U_1$  y  $U_2$  son condiciones de Neumann. Nos centraremos solamente en estas condiciones pues son las que realmente tienen un sentido físico.

Si  $u$  es solución al [PH], considerando (3.9) y (4.1), tenemos que ha de cumplir

$$\int_0^l (a(u')^2 + qu^2) + k_1 u(0)^2 + k_2 u(l)^2 = 0. \quad (4.3)$$

Además, todo  $u$  que cumpla esta condición será un elemento isótropo para la bilineal

$$b(v, u) = \int_0^l a_0 v^m u^m + a_2 v^{m-1} u^{m-1} + \dots + a_n v u,$$

por lo que todo  $u$  solución al [PH] deberá cumplir  $l(u) = \int_0^l f u = 0$ . Esta condición es precisamente la expuesta en el Teorema de Alternativa.

Por otro lado, sabemos que para que el problema sea regular, la única solución al [PH] ha de ser la trivial, por lo que demostrar la unicidad de soluciones de un problema será equivalente a demostrar que  $u = 0$  es la única solución a (4.3). A continuación mostraremos qué condiciones tienen que cumplir los problemas de contorno de segundo orden autoadjuntos para asegurarnos dicha unicidad.

Como  $a > 0$  y  $u(0)^2, u(l)^2 \geq 0$  podemos afirmar que

$$0 = \int_0^l (a(u')^2 + qu^2) + k_1 u(0)^2 + k_2 u(l)^2 \geq \int_0^l a(u')^2 + \int_0^l qu^2 \geq \int_0^l qu^2.$$

En particular, si  $q(x) \geq 0 \forall x \in [0, l]$ , entonces  $\int_0^l qu^2 \geq 0$ , lo cual implica que  $\int_0^l (a(u')^2 + qu^2) + k_1 u(0)^2 + k_2 u(l)^2 = \int_0^l a(u')^2 + \int_0^l qu^2 = \int_0^l qu^2 = 0$ .

Consideremos  $q_0$  el mínimo de  $q(x)$  en  $x \in [0, l]$ . Si  $q_0 > 0$ , entonces  $q(x) > 0 \forall x \in [0, l]$  y necesariamente  $\int_0^l u^2 = 0$ . Esto implica que  $u = 0$  y, por tanto, el problema es regular.

En cambio, si  $q_0 = 0$  ya no podemos afirmar que  $u$  tenga que tomar el valor nulo en todo el intervalo. Sin embargo, como  $\int_0^l a(u')^2 + \int_0^l qu^2 = 0$  y tanto  $\int_0^l a(u')^2$  como  $\int_0^l qu^2$  sólo pueden tomar valores positivos, ambos tendrán que ser nulos. Así pues,  $\int_0^l a(u')^2 = 0$  implica que  $u' = 0$  por lo que  $u = k$  con  $k$  constante. Si aplicamos ahora el operador diferencial a  $u = k$  obtenemos que  $L(k) = q(x)k = 0 \forall x \in [0, l]$ , por lo que si  $q(x)$  es distinto de cero en algún punto del intervalo, entonces  $u = k = 0$  y el problema es regular.

En tercer lugar, si  $q = 0$ , entonces siempre se cumplirá la ecuación diferencial. Sin embargo, además de la EDO,  $u = k$  también deberá cumplir las CC, esto es, como ya hemos dicho, se deberá cumplir que  $\int_0^l (a(u')^2 + qu^2) + k_1 u(0)^2 + k_2 u(l)^2 = k_1 u(0)^2 + k_2 u(l)^2 = 0$ . Es por ello, que si  $k_1$  es distinto de cero, entonces necesariamente  $u(0)^2 = 0$  puesto que ni  $k_1$  ni  $k_2$  pueden tomar valores negativos. Como  $u$  ha de ser constante en todo el intervalo, tenemos que  $u = 0$ . Lo mismo ocurriría si  $k_2 \neq 0$  o si ambos  $k_1$  y  $k_2$  son distintos de cero.

En cambio, si tanto  $k_1$  como  $k_2$  son igual a cero, es decir, si tenemos dos condiciones de Neumann, no tenemos ninguna restricción sobre el valor de  $u(0)$  o  $u(l)$ , por lo que  $u$  podría tomar cualquier valor constante y nuestro problema tendría infinitas soluciones.

Por último, si dejamos que  $q$  tome valores negativos dentro del intervalo, es decir, si  $q_0 < 0$ , entonces tenemos que

$$0 = \int_0^l (a(u')^2 + qu^2) + k_1 u(0)^2 + k_2 u(l)^2 \geq \int_0^l a(u')^2 + \int_0^l qu^2 \geq \int_0^l a(u')^2 + q_0 \int_0^l u^2.$$

Si existe un  $c \in [0, l]$  tal que  $u(c) = 0$ , entonces, gracias a las desigualdades de energía expuestas en el apartado 1.6, tenemos que  $\int_0^l (u'(s))^2 ds \geq \frac{\pi^2}{4l^2} \int_0^l u^2(s) ds$ . De esta forma podemos afirmar que

$$0 \geq \int_0^l a(u')^2 + q_0 \int_0^l u^2 \geq a_0 \int_0^l (u')^2 + q_0 \int_0^l u^2 \geq \left(a_0 \frac{\pi^2}{4l^2} + q_0\right) \int_0^l u^2,$$

donde hemos tenido en cuenta que  $a_0 = \min\{a(x)\}$  para todo  $x \in [0, l]$ . De esta forma obtenemos que si  $a_0 \frac{\pi^2}{4l^2} + q_0 > 0$ , esto es, si  $q_0 > -\frac{\pi^2}{4l^2} a_0$ , entonces necesariamente  $u = 0$ .

De esta forma podemos concluir que para que  $q_0$  pueda tomar valores negativos, alguna de las condiciones de contorno ha de ser de Dirichlet. Es más, si ambas condiciones son de Dirichlet, es decir, si  $u(0) = u(l) = 0$ , gracias a la desigualdad de Poincaré tenemos que  $\frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l u(x)^2 \leq \int_0^l u'(x)^2 dx$ . Por lo tanto, que para que el problema sea regular  $q_0$  tendría que cumplir  $q_0 > -\frac{\pi^2}{l^2} a_0$ , lo cual nos da un poco más de margen que si sólo tuviéramos una condición de Dirichlet.



#### 4.4. Función de Green de un problema de segundo orden regular

En este apartado buscaremos la Función de Green para el problema de segundo orden regular definido como:

$$L(u) = au'' + bu' + qu, \quad U_1(u) = U_2(u) = 0, \quad (4.4)$$

donde  $a, b, q \in \mathcal{C}([0, l])$  con  $a(x) > 0$  para todo  $x \in [0, l]$  y  $U_1, U_2$  son dos condiciones de contorno linealmente independientes.

Partiremos de la definición de la función de Green como la respuesta de un sistema ante una acción concentrada. Esto es, fijado  $s$ ,  $G_s$  será la única solución al problema

$$aG_s'' + bG_s' + qG_s = \delta_s, \quad U_1(G_s) = U_2(G_s) = 0.$$

De esta forma, la única respuesta del sistema ante una acción distribuida en el intervalo  $[0, l]$  con intensidad  $f$  estará dada por  $u(x) = \int_0^l G(x, s)f(s)ds$ .

Gracias a (2.17), sabemos que la función  $k : [0, l] \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ , a la que también llamaremos *función de Green Unilateral*, dada por

$$k(x, s) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq s, \\ g(x, s), & \text{si } x \geq s, \end{cases}$$

es una respuesta ante una acción concentrada en  $s$ . Si, además, tomamos  $\{u_1, u_2\}$  como una base de soluciones de la EDO homogénea, entonces todas las posibles respuestas ante acciones de este tipo estarán incluidas en

$$u(x) = c_1(s)u_1(x) + c_2(s)u_2(x) + k(x, s). \quad (4.5)$$

Para que  $u$  además sea solución al [PS], ha de cumplir las condiciones de contorno, de manera que  $U_1(u) = U_2(u) = 0$ . Podemos traducir esta imposición a un sistema lineal dado por

$$\begin{pmatrix} U_1(u_1) & U_1(u_2) \\ U_2(u_1) & U_2(u_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(s) \\ c_2(s) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} U_1(k) \\ U_2(k) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

de forma que, si  $c_1(s), c_2(s)$  son sus soluciones, entonces se cumplen las CC.

Al tratarse de un problema regular, la matriz de coeficientes es invertible y podemos expresar la solución a (4.6) como

$$c_1(s) = \frac{U_1(u_2)U_2(k) - U_2(u_2)U_1(k)}{U_1(u_1)U_2(u_2) - U_1(u_2)U_2(u_1)} \quad \text{y} \quad c_2(s) = \frac{U_2(u_1)U_1(k) - U_1(u_1)U_2(k)}{U_1(u_1)U_2(u_2) - U_1(u_2)U_2(u_1)}.$$

Como podemos observar,  $c_1(s)$  y  $c_2(s)$  son funciones continuas respecto de  $s$ , dado que  $g(l, s)$  lo es, y, por tanto,  $U_1(k)$  y  $U_2(k)$  también.



En definitiva, la función que buscamos, si existe, deberá coincidir con la determinada por

$$G(x, s) = k(x, s) + \frac{U_1(u_2)U_2(k) - U_2(u_2)U_1(k)}{U_1(u_1)U_2(u_2) - U_1(u_2)U_2(u_1)}u_1(x) \\ + \frac{U_2(u_1)U_1(k) - U_1(u_1)U_2(k)}{U_1(u_1)U_2(u_2) - U_1(u_2)U_2(u_1)}u_2(x)$$

Al ser  $u_1, u_2$  funciones continuas y dos veces diferenciables en el intervalo de estudio, la regularidad de la función  $G$  estará limitada por las propiedades de regularidad de la función  $k$ . Con lo cual, afirmamos que

- $G$  es una función continua en  $[0, l] \times [0, l]$ .
- $\forall s \in [0, l], G(\cdot, s) \in \mathcal{C}^2([0, s]) \cap \mathcal{C}^2([s, l])$ .
- $\forall s \in [0, l], \lim_{x \rightarrow s^+} \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)(x, s) = \lim_{x \rightarrow s^-} \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)(x, s) = \frac{-1}{a(s)}$ .
- $\forall s \in [0, l], L(G(\cdot, s)) = 0$  en  $[0, s)$  y en  $(s, l]$ , siendo  $L$  el operador diferencial de segundo orden.

Consideremos ahora  $f \in \mathcal{C}([0, l])$ , de forma que  $u(x) = \int_0^l G(x, s)f(s)ds$  es una solución a  $L(u) = f$ . Teniendo en cuenta (4.5), podemos reescribir  $u(x)$  de la siguiente manera:

$$u(x) = u_1(x) \int_0^l c_1(s)f(s)ds + u_2(x) \int_0^l c_2(s)f(s)ds + \int_0^l k(x, s)f(s)ds.$$

Como  $\int_0^l k(x, s)f(s)ds = \int_0^x g(x, s)f(s)ds$ ,

$$u(x) = u_1(x) \int_0^l c_1(s)f(s)ds + u_2(x) \int_0^l c_2(s)f(s)ds + \int_0^x g(x, s)f(s)ds.$$

Además, para que  $u(x)$  sea solución al [PS], ha de cumplir que

$$U(u) = \int_0^l U(G(x, s))f(s)ds = 0. \quad (4.7)$$

Como hemos elegido  $c_1(s), c_2(s)$  tal que,  $\forall s \in [0, l], G$  satisface  $U_1(G(\cdot, s)) = U_2(G(\cdot, s)) = 0$ , tenemos que (4.7) se cumple tanto para  $U_1$  como para  $U_2$ . Por lo tanto, podemos afirmar que la  $G$  que hemos definido cumple todos los requisitos para ser la *Función de Green del [PS]*, a saber:

- (i)  $G$  es una función continua en  $[0, l] \times [0, l]$ .



- (ii)  $\forall s \in [0, l], G(\cdot, s) \in \mathcal{C}^2([0, s]) \cap \mathcal{C}^2([s, l])$ .
- (iii)  $\forall s \in [0, l], \lim_{x \rightarrow s^+} \left( \frac{\delta G}{\delta x} \right)(x, s) = \lim_{x \rightarrow s^-} \left( \frac{\delta G}{\delta x} \right)(x, s) = \frac{-1}{a(s)}$ .
- (iv)  $\forall s \in [0, l], L(G(\cdot, s)) = 0$  en  $[0, s]$  y en  $(s, l]$ .
- (v)  $\forall s \in [0, l], U_1(G(\cdot, s)) = U_2(G(\cdot, s)) = 0$ .

Definamos el espacio vectorial de las funciones continuas en  $[0, l]$  cuyas primeras y segundas derivadas son seccionalmente continuas como  $\mathcal{C}_s^2([0, l])$ . Entonces, dado que  $G$  cumple (i), (ii) y (iii),  $G \in \mathcal{C}_s^2([0, l])$ .

Cuando el [PS] es regular, la Función de Green no sólo ha de existir, sino que también debe ser única. De hecho, si  $G_1$  fuera otra función con las propiedades descritas, entonces, fijado  $s \in [0, l]$ , la función  $u(x) = G(x, s) - G_1(x, s)$  satisfaría tanto las condiciones de contorno homogéneas, como la EDO  $L(u) = 0$  en  $[0, s]$  y  $[s, l]$ . Sin embargo, al tener  $G$  y  $G_1$  el mismo tipo de discontinuidad en  $s$ , de su resta obtenemos una función  $u \in \mathcal{C}^2([0, l])$  que, por lo tanto, cumple no sólo  $L(u) = 0$  en  $[0, s]$  y  $[s, l]$ , sino también que  $L(u)(s) = 0$ . Como se trata de un problema regular,  $u$  es la única solución al [PH], es decir,  $u = 0$  y, consecuentemente  $G(x, s) = G_1(x, s), \forall x \in [0, l], \forall s \in [0, l]$ .

En resumidas cuentas, el resultado que obtenemos de este desarrollo es que, si el [PS] es regular y  $G$  es su Función de Green; entonces,  $\forall f \in \mathcal{C}([0, l])$  la función

$$u(x) = \int_0^l G(x, s)f(s)ds$$

es la única solución al [PS].

## 4.5. Función de Green de un problema de Sturm-Liouville

En esta ocasión buscaremos la función de Green para el [PS] autoadjunto:

$$L(u) = -(au')' + qu, \quad U_1(u) = U_2(u) = 0, \quad (4.8)$$

donde, para futuras simplificaciones,  $U_1$  y  $U_2$  serán CC del tipo Sturm-Liouville.

Procederemos de manera similar al caso anterior, por lo que  $G$  seguirá estando dada por

$$\begin{aligned} G(x, s) = & k(x, s) + \frac{U_1(u_2)U_2(k) - U_2(u_2)U_1(k)}{U_1(u_1)U_2(u_2) - U_1(u_2)U_2(u_1)}u_1(x) \\ & + \frac{U_2(u_1)U_1(k) - U_1(u_1)U_2(k)}{U_1(u_1)U_2(u_2) - U_1(u_2)U_2(u_1)}u_2(x), \end{aligned}$$

aunque esta vez podremos simplificar su expresión.

En el apartado **2.3** hemos definido la Función de Green del PVI como el primer elemento la última columna de:

$$\hat{G}(x, s) = \Phi(x)\Phi^{-1}(s).$$

Si consideramos una base de soluciones de la EDO homogénea dada por  $\{u_1, u_2\}$ , podemos escribir la matriz fundamental como  $\Phi(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix}$  y  $\hat{G}(x, s)$  como

$$\hat{G}(x, s) = \frac{1}{w[u_1, u_2](s)} \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2'(s) & -u_2(s) \\ -u_1'(s) & u_1(s) \end{pmatrix},$$

donde  $w[u_1, u_2](s)$  es el Wronskiano de la base.

Por lo tanto, la Función de Green del PVI estará dada por

$$g(x, s) = \frac{u_2(x)u_1(s) - u_2(s)u_1(x)}{-a(s)w[u_1, u_2](s)}. \quad (4.9)$$

De hecho, la expresión  $aw[u_1, u_2]$  es constante, ya que si tenemos en cuenta (2.8) y que el operador es autoadjunto, es decir, que el coeficiente asociado a la derivada de primer orden  $a_1(t)$  cumple  $a_1 = a'$ , obtenemos que

$$w(t) = w(t_0)e^{-\int_{t_0}^t \frac{a_1(s)}{a(s)} ds} = w(t_0)e^{-\int_{t_0}^t \frac{a'(s)}{a(s)} ds} = w(t_0)e^{\ln(a(t_0)) - \ln(a(t))},$$

y, por tanto, que

$$a(t)w(t) = a(t)w(t_0)e^{\ln(a(t_0)) - \ln(a(t))} = a(t)w(t_0)\frac{a(t_0)}{a(t)} = w(t_0)a(t_0).$$

El hecho de haber escogido las CC del tipo Sturm-Liouville nos permite considerar  $u_1$  como la única solución al PVI  $L(u) = 0$ ,  $u(0) = -\beta$ ,  $u'(0) = \alpha$  y  $u_2$  como la de  $L(u) = 0$ ,  $u(l) = -\delta$ ,  $u'(l) = \gamma$ . De esta manera, como las CI son distintas de cero, sabemos que  $u_1, u_2$  son no nulas, por lo que satisfacen que  $U_1(u_1) = U_2(u_2) = 0$  y  $U_1(u_2), U_2(u_1) \neq 0$ , donde  $U_1(u) = \alpha u(0) + \beta u'(0)$  y  $U_2(u) = \gamma u(l) + \delta u'(l)$ . Además, sabemos que  $\{u_1, u_2\}$  es una base de soluciones, dado que se cumple que si  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$ , entonces

$$\lambda_1 U_1(u_1) + \lambda_2 U_1(u_2) = \lambda_2 U_1(u_2) = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_1 U_2(u_1) + \lambda_2 U_2(u_2) = \lambda_1 U_2(u_1) = 0,$$

lo cual implica que  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Por otro lado, el hecho de que  $\forall s \in [0, l]$  tengamos  $k(0, s) = k'(0, s) = 0$ , implica que si  $U_1$  es CC de Sturm-Liouville, entonces  $U_1(k) = 0$ . Además, como  $k(l, s) = g(l, s)$  y  $k'(l, s) = g'(l, s) \forall s \in [0, l]$ , entonces  $U_2(k) = \frac{U_2(u_1)u_2(s) - U_2(u_2)u_1(s)}{a(s)w[u_1, u_2](s)}$ . Teniendo esto en cuenta además de que  $U_1(u_1) = U_2(u_2) = 0$ , podemos simplificar  $G$  tal que

$$G(x, s) = k(x, s) - \frac{\frac{U_2(u_1)u_2(s)}{a(s)w[u_1, u_2](s)}}{U_2(u_1)}u_1(x) = k(x, s) - \frac{u_1(x)u_2(s)}{a(s)w[u_1, u_2](s)}.$$



$$\text{Como } k(x, s) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq s, \\ \frac{u_2(x)u_1(s) - u_2(s)u_1(x)}{-a(s)w[u_1, u_2](s)}, & \text{si } x \geq s, \end{cases} \text{ entonces}$$

$$G(x, s) = \frac{-1}{a(s)w[u_1, u_2](s)} \begin{cases} u_1(x)u_2(s), & \text{si } x \leq s, \\ u_1(s)u_2(x), & \text{si } x \geq s. \end{cases} \quad (4.10)$$

Al tratarse de un problema autoadjunto, tenemos que  $a(s)w[u_1, u_2]$  es constante, por lo que la función de Green del [PS] es simétrica, esto es,  $G(x, s) = G(s, x) \forall x, s \in [0, l]$ . Esta propiedad se plasma en el análisis de estructuras mediante la *Ley de Reciprocidad de Betti-Maxwell* que afirma que el efecto en  $x$  de una acción unitaria concentrada en  $s$  coincide con el efecto en  $s$  de una acción unitaria concentrada en  $x$ . De forma más general, nos indica que la energía del sistema se conserva, o que estamos ante un problema termodinámico reversible o no disipativo.

Observemos que para hallar la expresión (4.10) sólo hemos tenido que asumir que el operador sea autoadjunto para demostrar que  $a(s)w[u_1, u_2](s)$  es constante. Es por ello que dicha expresión es igualmente válida para problemas no autoadjuntos, aunque en ese caso el término  $a(s)w[u_1, u_2](s)$  deja de ser constante y la función de Green deja de ser simétrica.

## 4.6. Aplicaciones: flexiones longitudinales en barras

### 4.6.1. Ecuación Diferencial

El desplazamiento longitudinal de una barra es susceptible de ser modelado mediante una EDO de segundo orden, siempre y cuando éste sea pequeño y estemos ante un comportamiento elástico del material. Tomaremos la barra como un objeto unidimensional dado que la sección transversal será siempre mucho menor a su largura. Además, en este caso, sólo tendremos en cuenta la contribución de una fuerza axial<sup>3</sup>, por lo que no consideraremos la posibilidad de que ésta sea excéntrica. Esta aplicación resulta de especial utilidad en el cálculo de estructuras, por ejemplo, en el cálculo de deformaciones en columnas.

Planteando el equilibrio en una rebanada diferencial obtenemos que

$$\frac{\delta N}{\delta x} + p = 0,$$

donde  $N$  representa el esfuerzo axial y  $p$  una fuerza distribuida en dirección  $x$ . Por otro lado, gracias a la teoría de la elasticidad sabemos que

$$\frac{N}{EA} = \frac{\delta u}{\delta x}, \quad (4.11)$$

---

<sup>3</sup>Una fuerza axial se trata de una fuerza que actúa sobre el centro axial de un objeto en la dirección del eje longitudinal.

con  $E$  el módulo de Young del material y  $u$  el desplazamiento longitudinal de la barra. Consideraremos el Principio de Saint-Venant que establece que las tensiones sobre una barra elástica sometida a un esfuerzo axial forman un frente plano. De esta forma tenemos

$$-(EAu')'(x) = p(x), \quad (4.12)$$

donde  $A$  es la sección transversal de la barra. Observemos que se trata de un problema autoadjunto. Dado que en la mayoría de las aplicaciones estaremos tratando no sólo con un mismo material isótropo a lo largo de toda la barra sino que también con una sección transversal homogénea, (4.12) se puede reescribir como:

$$-EAu''(x) = p(x).$$

Para este desarrollo nos hemos basado en [11], aunque podemos encontrar este contenido en otros tantos libros, la mayoría de los cuales parten de [13].

#### 4.6.2. Condiciones de Contorno

Para plantear el problema de forma correcta, primero hemos de imponer dos CC linealmente independientes. Dada la generalización de Sturm-Liouville de las Condiciones de Contorno, éstas siempre tendrán que ser combinaciones lineales de la función  $u$  y su primera derivada evaluadas en los extremos de la barra, más concretamente

$$U_1(u) = \alpha u(0) + \beta u'(0) \quad \text{y} \quad U_2(u) = \gamma u(l) + \delta u'(l) \quad \text{con} \quad (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) > 0.$$

Debemos saber que  $u'$  es precisamente la función de la fuerza axial  $N$  dada en (4.11). Además, como hemos estado tratando siempre con un Problema Semihomogéneo en los problemas que planteemos las condiciones de contorno serán homogéneas.

Teniendo esto en cuenta, podemos considerar diferentes problemas, dependiendo de los valores que adopten  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$ :

- (i) Si  $\alpha = \gamma = 1$  y  $\beta = \delta = 0$ , entonces impondremos las condiciones de Dirichlet que por ser igual a cero también serán Esenciales

$$U_1(u) = u(0) = 0 \quad \text{y} \quad U_2(u) = u(l) = 0,$$

de forma que la barra estará biempotrada<sup>4</sup>. Cabe mencionar que al tratar sólo con fuerzas axiales es indiferente hablar de un empotramiento o de un apoyo simple dado que no estamos considerando ni el desplazamiento transversal ni ningún tipo de giro.

---

<sup>4</sup>Empotrada a ambos extremos. Un empotramiento es una unión que no permite ningún tipo de desplazamiento ni giro.

- (ii) Si  $\alpha = k_1$ ,  $\gamma = k_2$ ,  $\beta = -a(0) = -EA$  y  $\delta = a(l) = EA$ , entonces impondremos las condiciones de Robin, que por estar igualadas a cero también serán Naturales

$$U_1(u) = k_1 u(0) - EAu'(0) = 0 \quad \text{y} \quad U_2(u) = k_2 u(l) + EAu'(l) = 0,$$

de forma que tendremos una barra sujeta por muelles de constantes  $k_1$  y  $k_2$ . Es más, estamos imponiendo que el axil en los extremos sea igual a la fuerza ejercida por cada uno de los muelles debido al desplazamiento de la barra en los extremos. El cambio de signo entre  $\beta$  y  $\delta$  se debe al cambio de ejes locales del muelle a ejes globales.

- (iii) Si  $\alpha = k_1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\beta = a(0) = -EA$  y  $\delta = 0$ , entonces impondremos las condiciones de Mixtas Robin-Dirichlet

$$U_1(u) = k_1 u(0) - EAu'(0) = 0 \quad \text{y} \quad U_2(u) = u(l) = 0,$$

de forma que tendremos una barra sujeta por un muelle de constante  $k_1$  a un extremo, y empotrada al otro.

- (iv) Si  $\alpha = \delta = 1$  y  $\beta = \gamma = 0$ , entonces impondremos las condiciones Mixtas Dirichlet-Neumann

$$U_1(u) = u(0) = 0 \quad \text{y} \quad U_2(u) = u'(l) = 0,$$

de forma que la barra estará empotrada en uno de los extremos y libre en el otro. La segunda condición de contorno nos obliga a que el axil en el extremo libre sea nulo, dado que  $u'(l) = \frac{N(l)}{EA} = 0$ ; que es precisamente una condición necesaria para que el extremo esté libre y la barra esté en equilibrio, pues en ningún caso tendremos una reacción por parte del apoyo en un extremo libre.

- (v) Si  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = k_2$  y  $\delta = EA$  entonces impondremos las condiciones Mixtas de Neumann-Robin

$$U_1(u) = u'(0) = 0 \quad \text{y} \quad U_2(u) = k_2 u(l) + EAu'(l) = 0,$$

de forma que la barra estará libre en uno de los extremos y sujeta por un muelle de constante  $k_2$  en el otro.

#### 4.6.3. Resolución del Problema de Sturm-Liouville general

En primer lugar, lo que haremos será resolver el [PH], esto es, el problema cuando  $p(x) = 0$ . De esta forma nos podemos asegurar de que estamos tratando con un problema regular. Otra forma de hacerlo es, como hemos comentado en el Capítulo 2, mediante el Wronskiano. Sin embargo, dado el desarrollo expuesto en el apartado 4.3, ya podríamos afirmar en qué casos el problema no es regular. Es por ello que resolveremos el [PH] solamente para el primero de los casos, pues su interpretación puede ser interesante.

Consideremos el [PH]

$$EAu''(x) = 0, \quad U_1(u) = u(0) = U_2(u) = u(l) = 0.$$

La manera más sencilla de resolverlo es directamente, mediante el Teorema Fundamental del Cálculo. De esta forma, obtenemos que la solución  $u(x)$  debe tener dos grados de libertad, y por tanto, debe poder representarse como  $u(x) = Ax + B$ . Si ahora imponemos las Condiciones de Contorno,  $u(0) = B = 0$  y  $u(l) = Al + B = 0$  obtenemos que tanto  $A$  como  $B$  han de ser igual a cero, y por tanto,  $u(x) = 0$ .

Tal y como queríamos demostrar, la única solución al [PH] es la nula, por lo que se trata de un problema regular. Físicamente este hecho es muy intuitivo. Es evidente que una barra biempotrada, sin ningún axil actuando sobre ella y sin ninguna fuerza generada por el empotramiento, tendrá un desplazamiento nulo. Es más, no podrá ser de otra forma.

Para resolver el problema completo utilizaremos la definición de la función de Green empleada en el apartado 4.5. Démonos cuenta de que todavía no hemos definido la función  $p(x)$  para así resaltar la generalidad de éstas soluciones.

En primer lugar, buscaremos las soluciones  $u_1$  y  $u_2$  a los PVI's homogéneos  $u(0) = -\beta$ ,  $u'(0) = \alpha$  y  $u(l) = -\delta$ ,  $u'(l) = \gamma$ , respectivamente. Impondremos, por tanto, las condiciones a la solución general  $u(x) = Ax + B$ , obteniendo

$$\begin{array}{ll} u_1(0) = B_1 = -\beta & u_2(l) = A_2l + B_2 = -\delta \\ \underbrace{u_1'(0) = A_1 = \alpha}_{u_1(x) = \alpha x - \beta} & \underbrace{u_2'(l) = A_2 = \gamma}_{u_2(x) = \gamma x - \delta - \gamma l} \end{array}$$

De esta forma conseguimos una base de soluciones al [PH].

A continuación, intentaremos seguir la definición dada en (4.10). Para ello tendremos que calcular el Wronskiano

$$w[u_1, u_2] = \begin{vmatrix} \alpha x - \beta & \gamma x - \delta - \gamma l \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} = -\beta\gamma + \alpha\delta + \alpha\gamma l. \quad (4.13)$$

Igualando esta expresión a cero podemos saber para qué condiciones de contorno el problema no tiene una única solución.

Ya podemos escribir la función de Green de nuestro problema, en función de las Condiciones de Contorno de Sturm-Liouville:

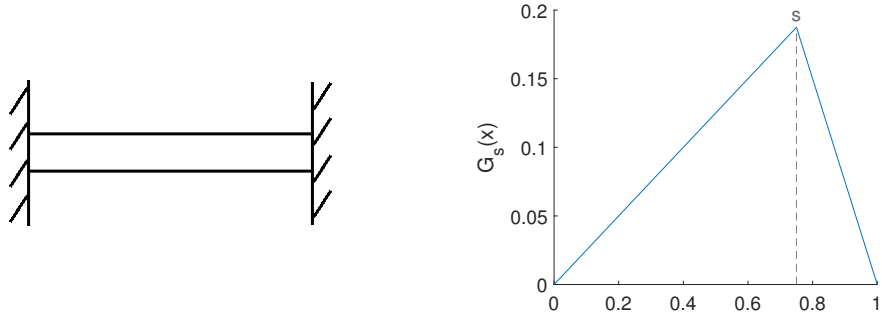
$$G(x, s) = \frac{-1}{EA(-\beta\gamma + \alpha\delta + \alpha\gamma l)} \begin{cases} (\alpha x - \beta)(\gamma s - \delta - \gamma l), & \text{si } x \leq s, \\ (\alpha s - \beta)(\gamma x - \delta - \gamma l), & \text{si } x \geq s. \end{cases} \quad (4.14)$$

Es interesante explicitar la función de Green en cada caso, ya que fijado  $s \in [0, l]$ , ésta representará el comportamiento de la barra ante una acción concentrada en  $s$ . Por lo tanto, a continuación sustituiremos  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  en cada caso. Así obtenemos:

(i)

$$G(x, s) = \frac{1}{EA l} \begin{cases} x(l - s), & \text{si } x \leq s, \\ s(l - x), & \text{si } x \geq s. \end{cases}$$

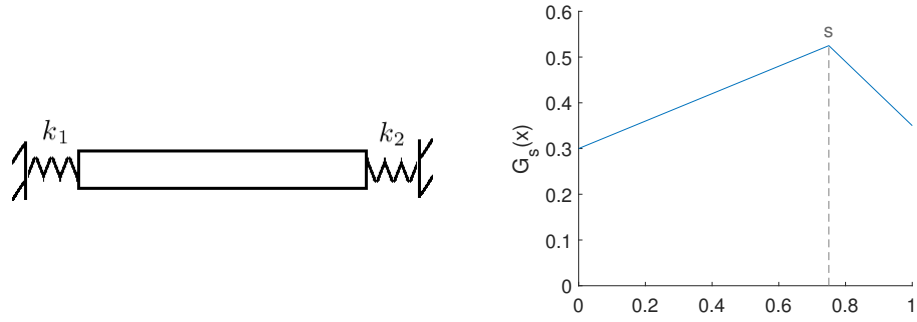




**Figura 4.1:** Izquierda: Barra biempotrada. Derecha: Respuesta ante una acción concentrada en  $s$ .

(ii)

$$G(x, s) = \frac{1}{EA(EAk_2 + EAk_1 + k_1k_2l)} \begin{cases} (k_1x + EA)(k_2(l - s) + EA), & \text{si } x \leq s, \\ (k_1s + EA)(k_2(l - x) + EA), & \text{si } x \geq s. \end{cases}$$

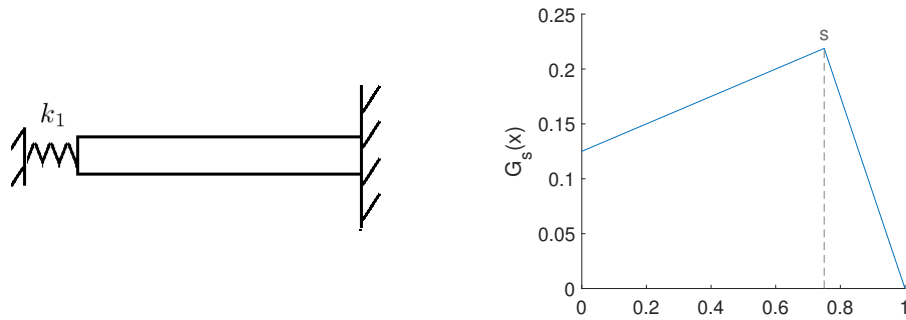


**Figura 4.2:** Izquierda: Barra sujeta a dos muelles. Derecha: Respuesta ante una acción concentrada en  $s$ .

(iii)

$$G(x, s) = \frac{1}{EA(EA + k_1l)} \begin{cases} (k_1x + EA)(l - s), & \text{si } x \leq s, \\ (k_1s + EA)(l - x), & \text{si } x \geq s. \end{cases}$$

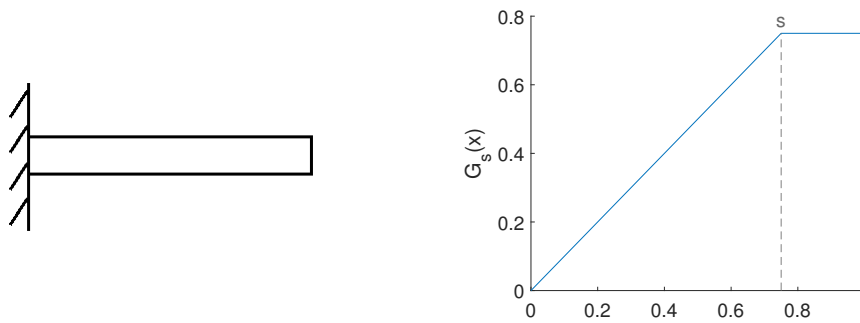




**Figura 4.3:** Izquierda: Barra sujeta a un muelle a un lado y empotrada al otro. Derecha: Respuesta ante una acción concentrada en  $s$ .

(iv)

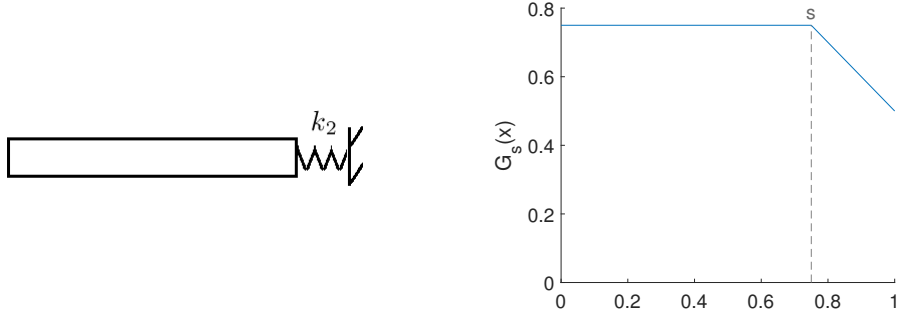
$$G(x, s) = \frac{1}{EA} \begin{cases} x, & \text{si } x \leq s, \\ s, & \text{si } x \geq s. \end{cases}$$



**Figura 4.4:** Izquierda: Barra empotrada a un lado y libre al otro. Derecha: Respuesta ante una acción concentrada en  $s$ .

(v)

$$G(x, s) = \frac{1}{EAk_2} \begin{cases} k_2(l - s) + EA, & \text{si } x \leq s, \\ k_2(l - x) + EA, & \text{si } x \geq s. \end{cases}$$



**Figura 4.5:** Izquierda: Barra libre a un lado y sujeta a un muelle al otro. Derecha: Respuesta ante una acción concentrada en  $s$ .

Con el objetivo de representar la función de Green hemos tomado  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ,  $l = 1$ ,  $s = \frac{3}{4}$  y  $EA = 1$ . Tengamos en cuenta que estos valores no son realistas. Simplemente nos servirán para poder representar de forma visual la función de Green. En realidad,  $EA \gg k_1, k_2$ , por lo que el desplazamiento será muy pequeño en comparación con la longitud de la barra. Por otro lado, es lo que cabe esperar dado que estamos bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos.

Observemos que la función anterior es simétrica para cualquier conjunto de condiciones de contorno, pues en todo caso estaremos tratando con un problema autoadjunto. Esto confirma la validez de la ya mencionada Ley de Reciprocidad de Betti-Maxwell, por la cual el efecto en  $x$  de un axil unitario en  $s$ , es el mismo que el recíproco.

Como sabemos, la solución a cualquier PC regular de los planteados mediante las condiciones de Sturm-Liouville estará dada por

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^l G(x, s)p(s)ds \\ &= \int_0^x \frac{(\alpha s - \beta)(\gamma(l - x) + \delta)}{EA(-\beta\gamma + \alpha\delta + \alpha\gamma l)}p(s)ds + \int_x^l \frac{(\alpha x - \beta)(\gamma(l - s) + \delta)}{EA(-\beta\gamma + \alpha\delta + \alpha\gamma l)}p(s)ds. \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos una solución a los problemas planteados en función de la carga  $p(x)$ , esto es:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad u(x) &= \frac{1}{EA l} \left( \int_0^x s(l - x)p(s)ds + \int_x^l x(l - s)p(s)ds \right). \\ \text{(ii)} \quad u(x) &= \frac{1}{EA} \left( \int_0^x \frac{(k_1 s + EA)(k_2(l - x) + EA)}{EA(k_1 + k_2) + k_1 k_2 l} p(s)ds \right. \\ &\quad \left. + \int_x^l \frac{(k_1 x + EA)(k_2(l - s) + EA)}{EA(k_1 + k_2) + k_1 k_2 l} p(s)ds \right). \end{aligned}$$

$$(iii) \quad u(x) = \frac{1}{EA} \left( \int_0^x \frac{(k_1 s + EA)(l - x)}{k_1 l + EA} p(s) ds + \int_x^l \frac{(k_1 x + EA)(l - s)}{k_1 l + EA} p(s) ds \right).$$

$$(iv) \quad u(x) = \frac{1}{EA} \left( \int_0^x s p(s) ds + \int_x^l x p(s) ds \right).$$

$$(v) \quad u(x) = \frac{1}{EA} \left( \int_0^x \frac{k_2(l - x) + EA}{k_2} p(s) ds + \int_x^l \frac{k_2(l - s) + EA}{k_2} p(s) ds \right).$$

Observemos cómo el caso (ii) engloba al resto. Si tomamos  $k_1$  y  $k_2$  como infinitas, o lo que es lo mismo, si los muelles tienen rigidez infinita, estaremos ante una barra biempotrada. Si, en cambio,  $k_1 = k_2 = 0$ , estamos ante una barra con extremos libres y la solución al problema estaría dada por una función con dos fracciones con denominador igual a cero.

Este último resultado también se plasma en la expresión del Wronskiano (4.13), gracias a la cual podemos saber fácilmente para qué Condiciones de Contorno el PH no presenta unicidad de soluciones. De hecho, éstas serán las mismas que las expuestas en el apartado 4.3 cuando  $q = 0$ . Como  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  están sujetas a la condición  $(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) > 0$ , si  $\beta\gamma + \alpha\delta + \alpha\gamma l = 0$  entonces necesariamente  $\alpha = \gamma = 0$ .

De esta forma, si  $\alpha = \gamma = 0$ ,  $\beta = a(0) = EA$  y  $\delta = a(l) = EA$ , entonces estaremos imponiendo las condiciones de Neumann

$$U_1(u) = EAu'(0) = 0 \text{ y } U_2(u) = EAu'(l) = 0.$$

Estas condiciones representan una barra libre en ambos extremos, dado que no hay ninguna restricción sobre  $u(x)$ . Además, estamos imponiendo que los axiles a ambos lados sean nulos, es decir,  $N(0) = N(l) = 0$ . Esto se puede intuir fácilmente si pensamos en que al estar la barra libre, no tendremos ninguna reacción en los extremos, por lo que el axil se ha de anular para que se cumpla el equilibrio.

Sin embargo, no estamos dando información sobre el desplazamiento de la barra en ningún punto, por lo que resolver el problema es pretender dar la variación de una magnitud sin ningún punto de referencia, cosa que, evidentemente, carece de sentido. En este caso, cualquier desplazamiento puede expresar la misma posición de la barra con tan sólo cambiar el punto de referencia, por lo que obtenemos infinitas soluciones.

#### 4.6.4. Resolución del problema con Condiciones no Homogéneas

Puede que nos hayamos preguntado cuál sería entonces el papel que jugarían las Condiciones de Contorno si éstas fueran no Homogéneas. En efecto, tiene sentido que nos planteemos qué representa el hecho de que las condiciones de Dirichlet, Robin o Neumann sean no homogéneas.



En primer lugar, supongamos que tenemos una barra empotrada a un extremo y libre al otro. Podemos imponer una condición de Neumann no homogénea

$$u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u'(l) = -\frac{N(l)}{EA},$$

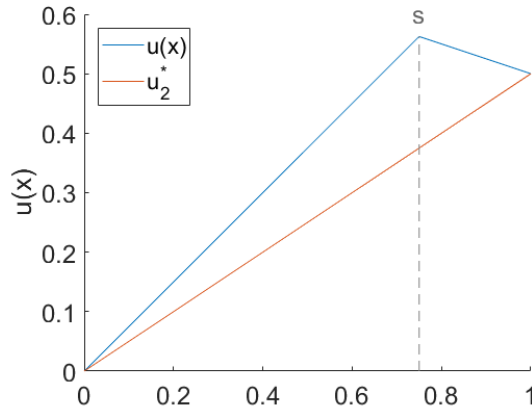
y así modelar una fuerza axial aplicada en el extremo libre.

Para resolver este tipo de problemas lo que haremos será levantar el dato, es decir, buscar una  $\bar{p}$  tal que el [PC] sea equivalente al [PS] con  $\bar{p}$  como término de fuerza. Por tanto, buscaremos un polinomio  $u_1^*$ , como máximo de segundo orden, que satisfaga las condiciones de contorno. En este caso dicho polinomio estará dado por  $u_1^* = -\frac{N(l)}{EA}x$ .

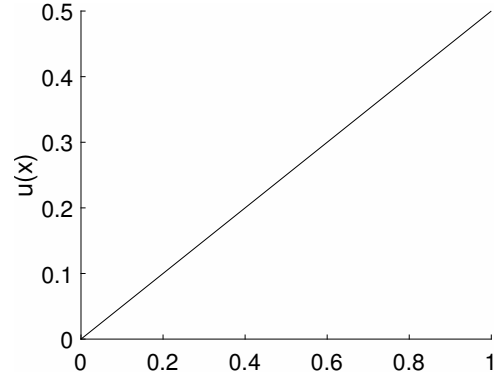
Como hemos visto al final del apartado 3.1, resolver el [PC] será equivalente a resolver el [PS] dado por

$$L(u) = -EAu''(x) = p(x) - L(u_1^*) = \bar{p}(x),$$

y sumarle a dicha solución  $u_1^*$ . De esta forma, y como  $L(u_1^*) = 0$ , obtenemos que la solución al [PC] con una condición de Neumann no homogénea estará dada por la superposición de la solución obtenida en el caso (iv) y  $u_1^*$ .



**Figura 4.7:** Respuesta del sistema ante una acción concentrada en  $s$  con Condición de Dirichlet no homogénea, donde hemos tomado  $\Delta l = \frac{1}{2}$ .



**Figura 4.6:** Respuesta del sistema ante una acción concentrada en el extremo libre, donde hemos tomado  $N(l) = \frac{1}{2}$ .

Si lo que queremos modelar es simplemente la respuesta de la barra sin más acciones que la impuesta en el contorno, entonces tendremos que  $p(x) = 0$  y la solución estará dada por  $u_1^* = -\frac{N(l)}{EA}x$ , como vemos en la figura (4.6).

Observemos que, como cabe esperar, esto sería equivalente al caso (iv) cuando  $s \rightarrow l$ .

En segundo lugar, supongamos que tenemos una barra biempotrada. En este caso, una condición de Dirichlet no homogénea en uno de los extremos, esto es,

$$u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(l) = -\Delta l,$$

implica un desplazamiento no nulo en el extremo derecho. Físicamente resulta intuitivo que esto sea equivalente a someter a la barra a una compresión en el extremo en cuestión.

Del mismo modo que en el caso anterior, buscamos un polinomio que satisfaga las condiciones de contorno. En este caso, se tratará del polinomio de primer orden  $u_2^* = -\frac{\Delta l}{l}x$ , y cumplirá, igual que en el caso anterior, que  $L(u_2^*) = 0$ . Es por ello que la solución al [PC] con una condición de Dirichlet no homogénea estará compuesta por la superposición de  $u_2^*$  y la respuesta dada en el caso (i), como vemos en la figura (4.7).

Si tenemos en cuenta que estamos bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos veremos que  $u_2^* = -u'(l)x = -\frac{N(l)}{EA}x = u_1^*$ . Esto se debe únicamente a la equivalencia física entre asumir un desplazamiento no nulo y aplicar un axil en un extremo, tal y como hemos afirmado anteriormente.

Las condiciones de Robin no homogéneas serían equivalentes a romper el equilibrio del sistema formado por el muelle y aplicar una fuerza axial en uno de los extremos. Podríamos pues, tratarlas de manera análoga. Sin embargo, desde el punto de vista práctico, las condiciones de Robin no homogéneas resultan menos interesantes.

#### 4.6.5. Tratamiento variacional

A continuación reescribiremos el problema desde el punto de vista variacional. Como hemos visto en (3.8), podemos reescribir nuestro problema como

$$-\int_0^l EAu''(x)v(x)dx = \int_0^l p(x)v(x)dx \quad \forall v \in \mathcal{C}^2([0, l]),$$

donde  $v(x)$  es una función auxiliar. Integrando por partes obtenemos

$$-EA[u'v]_0^l + EA \int_0^l u'(x)v'(x)dx = \int_0^l p(x)v(x)dx \quad \forall v \in \mathcal{C}^2([0, l]).$$

Introduciremos en nuestro sistema físico los dos muelles  $k_1$  y  $k_2$  añadiendo el término  $k_1u(0)v(0) + k_2u(l)v(l) - k_1u(0)v(0) - k_2u(l)v(l)$ . Si tomamos las CC homogéneas e imponemos que  $u$  y  $v$  las cumplan, podremos transformar nuestra expresión en una cuya parte derecha pueda expresarse en forma de aplicación bilineal simétrica, mientras que la parte izquierda puede tratarse como una aplicación lineal, esto es,

$$b(u, v) = \int_0^l EAu'(x)v'(x)dx + k_1u(0)v(0) + k_2u(l)v(l) = \int_0^l p(x)v(x)dx = l(v) \quad (4.15)$$

para toda  $v$  que cumpla las CC.

Ahora estamos en disposición de transformar nuestro problema en uno variacional. Resolver la igualdad anterior resulta ser equivalente a hallar el mínimo del funcional de energía dado por

$$\min\{b(u, u) - 2l(u)\} = \min\left\{\int_0^l EAu'(x)^2 + k_1u(0)^2 + k_2u(l)^2 - 2\int_0^l p(x)u(x)dx\right\}.$$



Teniendo en cuenta que  $u$  es el desplazamiento de la barra y, por tanto, la solución a nuestro problema, entonces el término  $\int_0^l EAu'(x)^2 = \int_0^l \frac{N(x)^2}{EA}$  representa la energía de deformación por axil,  $k_1u(0)^2 + k_2u(l)^2$  la energía almacenada en los muelles, y  $2 \int_0^l p(x)u(x)$  el trabajo hecho por la fuerza  $p$  para conseguir un desplazamiento  $u$ .

A menudo a estos desplazamientos se les da el nombre de desplazamientos virtuales, mientras que a los trabajos generados por ellos se les llama trabajos virtuales. Por lo tanto, nuestro problema es equivalente a encontrar, de entre todos los desplazamientos virtuales posibles, precisamente aquel que minimiza la energía total del sistema. Además, (4.15) precisamente afirma que si  $u = v$  es la solución a nuestro problema, o equivalentemente, si la barra está en equilibrio, entonces el trabajo virtual interno ha de ser igual al trabajo virtual externo.

## Capítulo 5

# Problema de Contorno regular de cuarto orden

### 5.1. Condiciones de Contorno

Las condiciones de contorno de cuarto orden son, a primera vista, menos intuitivas que las asociadas al orden dos, si bien la idea sobre la que reposan es la misma. Para entender las definiciones de CC que encontraremos a continuación, deberemos tener en cuenta la formulación débil de nuestro problema de contorno autoadjunto.

Según ella, el problema  $(au'')'' - (bu')' + qu = f$  sería equivalente a

$$\int_0^l v \left( (au'')'' - (bu')' + qu \right) = \int_0^l f v, \forall v \in \mathcal{C}^4([0, l]).$$

Si desarrollamos ésta última igualdad obtenemos, mediante la integración por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^l f v &= [v(au'')' - v'(au'')]_0^l + \int_0^l au''v' + [-vbu']_0^l + \int_0^l bu'v' + \int_0^l quv \\ &= \int_0^l (au''v'' + bu'v' + quv) + v(l)((au'')'(l) - (bu')(l)) \\ &\quad - v(0)((au'')'(0) - (bu')(0)) + v'(0)(au'')(0) - v'(l)(au'')(l). \end{aligned}$$

Teniendo esto en cuenta, definiremos las *Condiciones de Contorno de Dirichlet* como las dadas por

$$U_1^D(u) = u(0), \quad U_2^D(u) = u'(0), \quad U_3^D(u) = u(l), \quad \text{y} \quad U_4^D(u) = u'(l),$$

de manera que si  $u$  y  $v$  cumplen las CC homogéneas, nuestro problema se reduce a encontrar una  $u$  que satisfaga  $\int_0^l au''v'' + bu'v' + quv = \int_0^l f v$ ; o, equivalentemente, a

encontrar una  $u$  que minimice su funcional de energía asociado. Por ello, llamaremos *Condición de Contorno Esencial* a la dada por

$$c_1 U_1^D + c_2 U_2^D + c_3 U_3^D + c_4 U_4^D = 0, \text{ con } |c_1| + |c_2| + |c_3| + |c_4| > 0.$$

Siguiendo un procedimiento análogo al utilizado en los problemas de segundo orden, introduciremos en la formulación débil una expresión nula -sin que por ello se deje de cumplir la igualdad-, con el objetivo de poder modelizar un mayor número de situaciones físicas. Añadiendo pues  $k_1 u(0)v(0) - k_1 u(0)v'(0) + k_2 u'(0)v'(0) - k_2 u'(0)v(l) + k_3 u(l)v(l) - k_3 u(l)v'(l) + k_4 u'(l)v'(l) - k_4 u'(l)v(l)$ , tenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left( au''v'' + bu'v' + quv \right) + k_1 u(0)v(0) + k_2 u'(0)v'(0) + k_3 u(l)v(l) + k_4 u'(l)v'(l) \\ & + v(l)((au'')'(l) - (bu')(l) - k_3 u(l)) - v(0)((au'')'(0) - (bu')(0) + k_1 u(0)) \\ & + v'(0)((au'')'(0) - k_2 u'(0)) - v'(l)((au'')'(l) + k_4 u'(l)) = \int_0^l f v \end{aligned}$$

De esta forma definiremos las *Condiciones de Contorno de Robin* como:

$$\begin{aligned} U_1^R(u) &= k_1 u(0) - (bu')(0) + (au'')'(0), & U_2^R(u) &= k_2 u'(0) - (au'')(0), \\ U_3^R(u) &= k_3 u(l) - (au'')'(l) + (bu')(l), & U_4^R(u) &= k_4 u'(l) + (au'')(l). \end{aligned}$$

donde  $a$  es el coeficiente principal del operador diferencial al que están asociadas y  $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$  son generalmente mayores o iguales a cero. Así pues, cuando las Condiciones de Robin homogéneas se cumplan, nos quedaremos tan sólo con una aplicación bilineal simétrica.

Este es el motivo por el que denominaremos *Condición Natural* a

$$c_1 U_1^R + c_2 U_2^R + c_3 U_3^R + c_4 U_4^R = 0, \text{ con } |c_1| + |c_2| + |c_3| + |c_4| > 0.$$

De nuevo, si  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ , las Condiciones de Robin serán equivalentes a las de Neumann, es decir,

$$\begin{aligned} U_1^N(u) &= -(bu')(0) + (au'')'(0), & U_2^N(u) &= -(au'')(0), \\ U_3^N(u) &= -(au'')'(l) + (bu')(l), & U_4^N(u) &= (au'')(l). \end{aligned}$$

Sin embargo, con el objetivo de hacer un estudio general de los problemas de cuarto orden con condiciones separadas, utilizaremos la generalización de las CC anteriores dada por:

$$\begin{aligned} U_1(u) &= \alpha_1 u(0) + \beta_1 [(au'')'(0) - b(0)u'(0)] & U_2(u) &= \gamma_1 u'(0) + \delta_1 u''(0) \\ U_3(u) &= \alpha_2 u(l) + \beta_2 [(au'')'(l) - b(l)u'(l)] & U_4(u) &= \gamma_2 u'(l) + \delta_2 u''(l), \end{aligned}$$



donde  $(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\gamma_1^2 + \delta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)(\gamma_2^2 + \delta_2^2) > 0$ . Observemos que esta definición es equivalente a las tres anteriores para distintos valores de  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$ . Sin embargo, no tiene una razón física de ser, es decir, su motivación es únicamente la de servir de herramienta matemática.

La prácticamente total ausencia de tratamiento de este tipo de problemas en los manuales al uso, ha hecho imprescindible la recuperación de parte de los contenidos de la monografía [10], que ha sido posible gracias a [9].

## 5.2. Problema de cuarto orden autoadjunto

El problema de contorno de cuarto orden autoadjunto que analizaremos viene dado por la ecuación

$$(au'')'' - (bu')' + qu = f,$$

donde  $a \in \mathcal{C}^2([0, l])$ ,  $b \in \mathcal{C}^1([0, l])$ ,  $q, f \in \mathcal{C}([0, l])$  y  $a(x) > 0 \forall x \in [0, l]$ . Consideraremos las CC de la forma

$$\begin{aligned} U_1(u) &= \alpha_1 u(0) + \beta_1 [(au'')'(0) - b(0)u'(0)] & U_2(u) &= \gamma_1 u'(0) + \delta_1 u''(0) \\ U_3(u) &= \alpha_2 u(l) + \beta_2 [(au'')'(l) - b(l)u'(l)] & U_4(u) &= \gamma_2 u'(l) + \delta_2 u''(l), \end{aligned}$$

donde  $(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\gamma_1^2 + \delta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)(\gamma_2^2 + \delta_2^2) > 0$ .

La matriz  $[B, C]$  queda dada por

$$[B, C] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 b(0) & \beta_1 a'(0) & \beta_1 a(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & -\beta_2 b(l) & \beta_2 a'(l) & \beta_2 a(l) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \delta_2 & 0 \end{pmatrix},$$

de manera que  $\text{rg}[B, C] = 4$ .

Intentaremos ahora resolver el [PS] dado por  $(au'')'' - (bu')' + qu = f$  y  $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 0$ , donde  $U_1, U_2, U_3$  y  $U_4$  son las anteriormente definidas. Más concretamente, buscaremos, de nuevo, las condiciones bajo las cuales existe solución al [PS]. Para ello, repetiremos el proceso realizado para las EDO de segundo orden.

Es decir, teniendo en cuenta que  $u, v \in \mathcal{C}^4([0, l])$  son soluciones al [PS] y al [PH], respectivamente, e integrando  $\int_0^l L(u)v$  por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^l L(u)v &= \int_0^l [au''v'' + bu'v' + quv] + v(l)[(au'')'(l) - b(l)u'(l)] \\ &\quad + v(0)[-(au'')'(0) + b(0)u'(0)] + v'(0)a(0)u''(0) - v'(l)a(l)u''(l). \end{aligned}$$

Consideremos  $B(u, v)$  tal que  $\int_0^l L(u)v - \int_0^l L(v)u = B(u, v)$ . Si definimos  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  como

$$\begin{aligned} C_1(u) &= -\beta_1 u(0) + \alpha_1 [(au'')'(0) - b(0)u'(0)] & C_2(u) &= \delta_1 u'(0) - \gamma_1 u''(0) \\ C_3(u) &= -\beta_2 u(l) + \alpha_2 [(au'')'(l) - b(l)u'(l)] & C_4(u) &= \delta_2 u'(l) - \gamma_2 u''(l), \end{aligned}$$

entonces podemos expresar  $B(u, v)$  en función de las condiciones de contorno  $U_1, U_2, U_3$  y  $U_4$ .

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} [U_1(u)C_1(v) - U_1(v)C_1(u)] + \frac{a(0)}{\gamma_1^2 + \delta_1^2} [U_2(u)C_2(v) - U_2(v)C_2(u)] \\ &\quad - \frac{1}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} [U_3(u)C_3(v) - U_3(v)C_3(u)] - \frac{a(l)}{\gamma_2^2 + \delta_2^2} [U_4(u)C_4(v) - U_4(v)C_4(u)]. \end{aligned}$$

Que  $u$  sea solución al Problema Semihomogéneo y  $v$  al Homogéneo implica que  $U_i(u) = U_i(v) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, 4$  y, por tanto, que  $B(u, v) = 0$  y  $\int_0^l L(u)v = \int_0^l L(v)u$ . Como, además,  $u$  y  $v$  cumplen que  $L(u) = f$  y  $L(v) = 0$ , respectivamente, obtenemos que  $\int_0^l f v = \int_0^l L(u)v = \int_0^l L(v)u = 0$ . Por lo tanto, para que el [PS] tenga solución, es necesario que  $f$  satisfaga

$$\int_0^l f v = 0.$$

De hecho, podemos probar que esta condición es también suficiente siguiendo los mismos pasos que en el apartado 4.2. Denotemos con  $S$  al subespacio vectorial formado por las soluciones del problema homogéneo  $S = \{v \in C^4([0, l]) : L(v) = 0, U_1(v) = U_2(v) = U_3(v) = U_4(v) = 0\}$ . Llamemos  $\mathcal{C}$  a la aplicación lineal  $\mathcal{C} : S \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por  $\mathcal{C}(v) = (C_1(v), C_2(v), C_3(v), C_4(v))$ . Podemos comprobar que la matriz  $K$  determinada por los coeficientes de las condiciones de contorno  $U_1, U_2, U_3, U_4, C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  es una matriz invertible:

$$K = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 b(0) & \beta_1 a'(0) & \beta_1 a(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & -\beta_2 b(l) & \beta_2 a'(l) & \beta_2 a(l) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \delta_2 & 0 \\ -\beta_1 & -\alpha_1 b(0) & \alpha_1 a'(0) & \alpha_1 a(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & -\alpha_2 b(l) & \alpha_2 a'(l) & \alpha_2 a(l) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 & -\gamma_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos permite deducir que  $\dim \text{Im} \mathcal{C} = \dim \text{Ker} M^T$ .

Teniendo en cuenta la definición de  $B(u, v)$ , si  $v \in S$ , entonces

$$\begin{pmatrix} U_1(u_1) & U_2(u_1) & U_3(u_1) & U_4(u_1) \\ U_1(u_2) & U_2(u_2) & U_3(u_2) & U_4(u_2) \\ U_1(u_3) & U_2(u_3) & U_3(u_3) & U_4(u_3) \\ U_1(u_4) & U_2(u_4) & U_3(u_4) & U_4(u_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(v) \\ C_2(v) \\ C_3(v) \\ C_4(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto nos indica que  $\text{Img}\mathcal{C} \subset \text{Ker}M^T$ , por lo que ya podemos afirmar que  $\text{Img}\mathcal{C} = \text{Ker}M^T$  y expresar la condición necesaria y suficiente de resolubilidad (3.5) como  $U_1(u_p)C_1(v) + U_2(u_p)C_2(v) + U_3(u_p)C_3(v) + U_4(u_p)C_4(v) = 0 \quad \forall v \in S$ . Es decir, ahora ya podemos afirmar que la condición necesaria y suficiente para que exista solución al problema de contorno es que  $\int_0^l f v \quad \forall v \in S$ .

Nuevamente, resumimos los resultados obtenidos en el *Teorema de Alternativa*. Para que el [PS] dado por

$$(au'')'' - (bu')' + qu = f, \quad U_1(u) = U_2(u) = U_3(u) = U_4(u) = 0,$$

tenga solución, es condición necesaria y suficiente que  $f$  satisfaga  $\int_0^l f v = 0 \quad \forall v \in S$  donde  $S = \{v \in C^4([0, l]) : (av'')'' - (bv')' + qv = 0, \quad U_1(v) = U_2(v) = U_3(v) = U_4(v) = 0\}$ .

### 5.3. Tratamiento variacional del Problema Autoadjunto

Consideremos  $u \in \mathcal{C}^4([0, l])$  una solución al [PH]  $L(u) = (au'')'' - (bu')' + qu = 0$ ,  $U_1(u) = U_2(u) = U_3(u) = U_4(u) = 0$ , donde  $a > 0$ ,  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  y  $U_4$  son condiciones de contorno de Robin, es decir,

$$\begin{aligned} U_1(u) &= k_1 u(0) - (bu')(0) + (au'')(0), & U_2(u) &= k_2 u'(0) - (au'')(0), \\ U_3(u) &= k_3 u(l) - (au'')(l) + (bu')(l), & U_4(u) &= k_4 u'(l) + (au'')(l). \end{aligned}$$

Tengamos en cuenta que si  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  tienden a infinito, entonces  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  y  $U_4$  son equivalentes a las condiciones de Dirichlet, mientras que si  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ , entonces  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  y  $U_4$  son condiciones de Neumann. Para aligerar el estudio que vamos a realizar supondremos también que  $q \geq 0$ , pues en las aplicaciones que le daremos será de esta forma.

De nuevo, para que el problema sea regular la única solución al [PH] ha de ser la trivial. En ese caso,  $u = 0$  ha de ser la única función que satisfaga

$$\int_0^l \left( a(u'')^2 + b(u')^2 + qu^2 \right) + k_1 u(0)^2 + k_2 u'(0)^2 + k_3 u(l)^2 + k_4 u'(l)^2 = 0.$$



Como  $a > 0$  y  $u(0)^2, u(l)^2, u'(0)^2, u'(l)^2 \geq 0$  podemos afirmar que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l \left( a(u'')^2 + b(u')^2 + qu^2 \right) + k_1 u(0)^2 + k_2 u'(0)^2 + k_3 u(l)^2 + k_4 u'(l)^2 \\ &\geq \int_0^l a(u'')^2 + \int_0^l b(u')^2 + \int_0^l qu^2. \end{aligned}$$

Además, si  $b > 0$ , entonces  $0 \geq \int_0^l b(u')^2$  por ser  $a$  y  $q$  positivas. De esto se sigue que necesariamente  $\int_0^l (u')^2 = 0$  por lo que  $u' = 0$  y  $u$  es constante. Si además tenemos que  $q(x) > 0$  para algún  $x \in [0, l]$ , entonces bastará con aplicar el operador diferencial a la constante que denotaremos por  $k$ , de forma que  $L(k) = q(x)k = 0$  para todo  $x \in [0, l]$ , lo cual implica que  $u = k = 0$ . Si, por el contrario,  $q = 0$  tendremos que recurrir a estudiar la primera igualdad  $0 = \int_0^l ((au'')^2 + b(u')^2 + qu^2) + k_1 u(0)^2 + k_2 u'(0)^2 + k_3 u(l)^2 + k_4 u'(l)^2$ . Como  $q = 0$  y  $u' = 0$ , tenemos que  $0 \geq k_1 u(0)^2 + k_3 u(l)^2$ . Tanto  $k_1$  como  $k_3$  son positivas por lo que con que alguna de las dos sea distinta de cero ya tendremos unicidad de soluciones, es decir,  $u = 0$ . Sin embargo, si  $k_1 = k_3 = 0$  entonces tendremos infinitas soluciones de la forma  $u = k$  con  $k \in \mathbb{R}$ .

En segundo lugar, si  $b = 0$ , entonces tenemos  $0 \geq \int_0^l a(u'')^2 + \int_0^l qu^2$ . Dado que  $a > 0$  y  $q \geq 0$ , necesariamente ambos sumandos han de ser nulos. Que  $a \neq 0$  implica que  $\int_0^l (u'')^2 = 0$ , por lo que  $u'' = 0$ ,  $u' = C_1$  y  $u = C_1 x + C_2$  con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Imponiendo la ecuación diferencial obtenemos que  $L(u) = q(x)(C_1 x + C_2) = 0$ . Si  $q(x)$  es mayor que cero en más de un punto del intervalo, entonces como  $u$  describe una recta, ésta tendrá que ser siempre nula, esto es,  $u = 0$ . En cambio, si  $q(x) = 0 \forall x \in [0, l]$ , entonces tendremos que imponer las condiciones de contorno sobre  $u = C_1 x + C_2$ . Como  $0 \geq k_1 u(0)^2 + k_2 u'(0)^2 + k_3 u(l)^2 + k_4 u'(l)^2$  y  $u' = C_1$ , con que  $k_2$  o  $k_4$  sean distintas de cero, obtendremos que  $C_1 = 0$  y  $u$  es constante. Si además  $k_1$  o  $k_3$  -o ambas- son distintas de cero, entonces tendremos unicidad de soluciones. Por otro lado, si tanto  $k_1$  como  $k_3$  son distintas de cero, entonces necesariamente  $u = 0$ , por lo que tendremos unicidad de soluciones sin importar el valor de  $k_2$  y  $k_4$ .

Por último dejaremos que  $b$  tome valores negativos dentro del intervalo, es decir, que  $b_0 < 0$  donde  $b_0 = \min\{b(x)\} \forall x \in [0, l]$ . En primer lugar estudiaremos qué pasa si  $q = 0$ . En este caso, necesitaremos conocer un  $c \in [0, l]$  tal que  $u'(c) = 0$  para así poder utilizar la desigualdad de energía  $\int_0^l (u''(s))^2 ds \geq \frac{\pi^2}{4l^2} \int_0^l (u'(s))^2 ds$ . De esta forma se cumple que

$$0 \geq \int_0^l a(u'')^2 + b_0 \int_0^l (u')^2 \geq a_0 \int_0^l (u'')^2 + b_0 \int_0^l (u')^2 \geq \left( a_0 \frac{\pi^2}{4l^2} + b_0 \right) \int_0^l (u')^2,$$

donde hemos tenido en cuenta que  $a_0 = \min\{a(x)\}$  para todo  $x \in [0, l]$ . De esta manera obtenemos que si  $a_0 \frac{\pi^2}{4l^2} + b_0 > 0$ , esto es, si  $b_0 > -\frac{\pi^2}{4l^2} a_0$ , entonces  $\int_0^l (u')^2 = 0$  y por lo tanto  $u$  será constante. Como  $0 \geq k_1 u(0)^2 + k_2 u'(0)^2 + k_3 u(l)^2 + k_4 u'(l)^2$  y  $u = C$ , con que  $k_1$  o  $k_3$  -o ambas- son distintas de cero, entonces tendremos unicidad de soluciones. Asimismo, observemos que gracias al *Teorema de Rolle*, si tenemos que  $u(0) = u(l) = 0$ , entonces siempre existirá un  $c$  tal que  $u'(c) = 0$ .

Es más, si se cumpliera tanto  $u'(0) = 0$  como  $u'(l) = 0$ , gracias a la desigualdad de Poincaré tenemos que  $\int_0^l u''(x)^2 dx \geq \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l u'(x)^2 dx$ . Por lo tanto, que para que el problema sea regular  $b_0$  ha de cumplir  $b_0 > -\frac{\pi^2}{l^2} a_0$ , siendo o bien  $k_1$ , o bien  $k_3$ , o bien ambas, distintas de cero.

Si por el contrario  $q > 0$ , y existe un  $c \in [0, l]$  tal que  $u'(c) = 0$ , entonces

$$0 \geq \left(a_0 \frac{\pi^2}{4l^2} + b_0\right) \int_0^l (u')^2 + \int_0^l q u^2 \geq \left(a_0 \frac{\pi^2}{4l^2} + b_0\right) \int_0^l (u')^2 + q_0 \int_0^l u^2,$$

donde hemos considerado  $q_0 = \min\{q(x)\}$  para todo  $x \in [0, l]$ . Por lo tanto, si  $b_0$  cumple  $b_0 > -\frac{\pi^2}{4l^2} a_0$ , entonces como ambos sumandos son positivos, necesariamente cada uno de ellos ha de ser igual a cero. En particular, se ha de cumplir que  $q_0 \int_0^l u^2 = 0$ , lo cual implica que  $u = 0$ . Consecuentemente, para asegurarnos de que este problema presenta unicidad de soluciones, basta con que  $b_0$  cumpla  $b_0 > -\frac{\pi^2}{4l^2} a_0$ .

## 5.4. Función de Green de un problema de cuarto orden regular

Como ya hemos hecho en el caso de segundo orden, en este apartado buscaremos la función  $G : [0, l] \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que la respuesta ante una acción distribuida en el intervalo  $[0, l]$  con intensidad  $f$  este dada por  $u(x) = \int_0^l G(x, s) f(s) ds$ .

Consideremos la función  $k : [0, l] \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $k(x, s) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq s, \\ g(x, s), & \text{si } x \geq s. \end{cases}$ ,

donde  $g(x, s)$  es la función de Green para el PVI de cuarto orden. Tomemos  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  como una base de soluciones de la EDO homogénea. Así, todas las posibles respuestas ante acciones de este tipo estarán incluidas en

$$u(x) = c_1(s)u_1(x) + c_2(s)u_2(x) + c_3(s)u_3(x) + c_4(s)u_4(x) + k(x, s). \quad (5.1)$$

Para que  $u$  además sea solución al [PS] regular

$$\begin{aligned} L(G_s) &= a_0 G_s^{iv} + a_1 G_s^{iii} + a_2 G_s' + a_3 G_s' + a_4 G_s = \delta_s, \\ U_1(G_s) &= U_2(G_s) = U_3(G_s) = U_4(G_s) = 0, \end{aligned}$$

donde  $U_1 = U_2 = U_3 = U_4$  son dos CC linealmente independientes, ha de cumplir las condiciones de contorno. Esto se puede traducir al sistema lineal dado por

$$\begin{pmatrix} U_1(u_1) & U_1(u_2) & U_1(u_3) & U_1(u_4) \\ U_2(u_1) & U_2(u_2) & U_2(u_3) & U_2(u_4) \\ U_3(u_1) & U_3(u_2) & U_3(u_3) & U_3(u_4) \\ U_4(u_1) & U_4(u_2) & U_4(u_3) & U_4(u_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(s) \\ c_2(s) \\ c_3(s) \\ c_4(s) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} U_1(k) \\ U_2(k) \\ U_3(k) \\ U_4(k) \end{pmatrix},$$



de forma que las soluciones  $c_1(s), c_2(s), c_3(s), c_4(s)$ , que existen dado que es un problema regular, harán que  $u(x)$  cumpla las CC.

Estas soluciones estarán compuestas por las condiciones de contorno evaluadas en  $u_1, u_2, u_3, u_4$  y  $k$  en los extremos del intervalo. Es por ello que si el determinante formado por dichas condiciones es distinto de cero, es decir, si el problema es regular, entonces  $c_1(s), c_2(s), c_3(s), c_4(s)$  serán funciones continuas con respecto de  $s$ .

Como  $u_1, u_2, u_3, u_4$  son funciones continuas y cuatro veces diferenciables en el intervalo de estudio, la regularidad de la función  $G$  estará limitada por las propiedades de regularidad de la función  $k$ .

Consideremos ahora  $f \in \mathcal{C}([0, l])$ , de forma que  $u(x) = \int_0^l G(x, s)f(s)ds$  es una solución a  $L(u) = f$ . Teniendo en cuenta (5.1) y como  $\int_0^l k(x, s)f(s) = \int_0^x g(x, s)f(s)ds$ , podemos reescribir  $u(x)$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u(x) = & u_1(x) \int_0^l c_1(s)f(s)ds + u_2(x) \int_0^l c_2(s)f(s)ds + u_3(x) \int_0^l c_3(s)f(s)ds \\ & + u_4(x) \int_0^l c_4(s)f(s)ds + \int_0^x g(x, s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Además, para que  $u(x)$  sea solución al [PS], ha de cumplir que

$$U(u) = \int_0^l U(G(x, s))f(s)ds = 0. \quad (5.2)$$

Como hemos elegido  $c_1(s), c_2(s), c_3(s), c_4(s)$  tal que,  $\forall s \in [0, l]$ ,  $G$  satisface  $U_1(G(\cdot, s)) = U_2(G(\cdot, s)) = U_3(G(\cdot, s)) = U_4(G(\cdot, s)) = 0$ , tenemos que (5.2) se cumple para todo  $U_i$  con  $i = 1, \dots, 4$ . Por lo tanto, podemos afirmar que la  $G$  que hemos definido cumple todos los requisitos para ser la *Función de Green del [PS]*, a saber:

- $G$  es una función continua en  $[0, l] \times [0, l]$ .
- $\forall s \in [0, l], G(\cdot, s) \in \mathcal{C}^4([0, s]) \cap \mathcal{C}^4([s, l])$ .
- $\forall s \in [0, l], \lim_{x \rightarrow s^+} \left( \frac{\delta^3 G}{\delta x^3} \right)(x, s) = \lim_{x \rightarrow s^-} \left( \frac{\delta^3 G}{\delta x^3} \right)(x, s) = \frac{-1}{a(s)}$ .
- $\forall s \in [0, l], L(G(\cdot, s)) = 0$  en  $[0, s)$  y en  $(s, l]$ .
- $\forall s \in [0, l], U_1(G(\cdot, s)) = U_2(G(\cdot, s)) = U_3(G(\cdot, s)) = U_4(G(\cdot, s)) = 0$ .

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de segundo orden es sencillo demostrar que si el problema es regular, la función de Green es única. Es más, ésta cumplirá que  $\forall f \in \mathcal{C}([0, l])$  la función

$$u(x) = \int_0^l G(x, s)f(s)ds$$

es la única solución al [PS].

## 5.5. Función de Green de un problema con condiciones separadas

En este apartado intentaremos hallar la Función de Green para el problema de cuarto orden

$$L(u) = (au'')'' - (bu')' + qu = f$$

con las condiciones separadas generales,

$$\begin{aligned} U_1(u) &= \alpha_1 u(0) + \beta_1 [(au'')'(0) - b(0)u'(0)] & U_2(u) &= \gamma_1 u'(0) + \delta_1 u''(0) \\ U_3(u) &= \alpha_2 u(l) + \beta_2 [(au'')'(l) - b(l)u'(l)] & U_4(u) &= \gamma_2 u'(l) + \delta_2 u''(l), \end{aligned}$$

donde  $(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\gamma_1^2 + \delta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)(\gamma_2^2 + \delta_2^2) > 0$ .

Recordemos que  $G$  estará dada por

$$G(x, s) = k(x, s) + c_1(s)u_1(x) + c_2(s)u_2(x) + c_3(s)u_3(x) + c_4(s)u_4(x),$$

donde  $c_1, c_2, c_3, c_4$  serán las soluciones al sistema lineal mediante el cual se imponen las condiciones de contorno.

El hecho de haber escogido las CC separadas nos permite encontrar una base a la EDO formada por elementos que simplifiquen el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & U_1(u_3) & U_1(u_4) \\ 0 & 0 & U_2(u_3) & U_2(u_4) \\ U_3(u_1) & U_3(u_2) & 0 & 0 \\ U_4(u_1) & U_4(u_2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(s) \\ c_2(s) \\ c_3(s) \\ c_4(s) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} U_1(k) \\ U_2(k) \\ U_3(k) \\ U_4(k) \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Para ello tendremos que considerar  $u_1$  como la única solución al PVI

$$L(u) = 0, \quad u(0) = -\beta_1 a(0), \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u'''(0) = \alpha_1;$$

$u_2$  como la única solución de

$$L(u) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = -\delta_1, \quad u''(0) = \gamma_1, \quad u'''(0) = -\frac{\delta_1 b(0)}{a(0)};$$

$u_3$  como la única solución al PVI dado por

$$L(u) = 0, \quad u(l) = -\beta_2 a(l), \quad u'(l) = 0, \quad u''(l) = 0, \quad u'''(l) = \alpha_2$$

y  $u_4$  como la de

$$L(u) = 0, \quad u(l) = 0, \quad u'(l) = -\delta_2, \quad u''(l) = \gamma_2, \quad u'''(l) = -\frac{\delta_2 b(l)}{a(l)}.$$

De esta manera, como las CI son distintas de cero, sabemos que  $u_1, u_2, u_3, u_4$  son no nulas, por lo que dan lugar al sistema simplificado (5.3). Además, se puede fácilmente

demostrar, de modo análogo a como hemos procedido en el caso de segundo orden, que  $\{u_1, u_4, u_3, u_4\}$  son linealmente independientes.

Consideremos la definición de  $k(x, s)$  como  $k(x, s) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq s, \\ g(x, s), & \text{si } x \geq s, \end{cases}$  donde  $g(x, s)$  es precisamente el primer elemento la última columna de

$$\hat{G}(x, s) = \Phi(x)\Phi^{-1}(s).$$

Entonces  $U_1(k) = U_2(k) = 0$ , al tratarse de condiciones de contorno que evalúan la función y sus derivadas en el cero. Sin embargo, para hallar  $U_3(k)$  y  $U_4(k)$  necesitaremos expresar  $g(x, s)$  en función de la base escogida.

Tomemos en cuenta que los siguientes wronskianos

$$\begin{aligned} w_{234}(s) &= w[u_2, u_3, u_4](s) = \begin{vmatrix} u_2(s) & u_3(s) & u_4(s) \\ u_2'(s) & u_3'(s) & u_4'(s) \\ u_2''(s) & u_3''(s) & u_4''(s) \end{vmatrix} \\ w_{134}(s) &= w[u_1, u_3, u_4](s) = \begin{vmatrix} u_1(s) & u_3(s) & u_4(s) \\ u_1'(s) & u_3'(s) & u_4'(s) \\ u_1''(s) & u_3''(s) & u_4''(s) \end{vmatrix} \\ w_{412}(s) &= w[u_4, u_1, u_2](s) = \begin{vmatrix} u_4(s) & u_1(s) & u_2(s) \\ u_4'(s) & u_1'(s) & u_2'(s) \\ u_4''(s) & u_1''(s) & u_2''(s) \end{vmatrix} \\ w_{312}(s) &= w[u_3, u_1, u_2](s) = \begin{vmatrix} u_3(s) & u_1(s) & u_2(s) \\ u_3'(s) & u_1'(s) & u_2'(s) \\ u_3''(s) & u_1''(s) & u_2''(s) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Así, podemos expresar nuestra función de Green para el PVI de cuarto orden como

$$g(x, s) = \frac{-u_1(x)w_{234}(s) + u_2(x)w_{134}(s) - u_3(x)w_{412}(s) + u_4(x)w_{312}(s)}{a(s)w[u_1, u_2, u_3, u_4](s)}. \quad (5.4)$$

Cabe mencionar que el coeficiente  $a(s)$  aparece dividiendo porque hemos considerado la EDO implícita.

Teniendo en cuenta que, como hemos visto en (5.3), gracias a la base escogida se cumple  $U_1(u_1) = U_2(u_1) = U_1(u_2) = U_2(u_2) = U_3(u_3) = U_4(u_3) = U_3(u_4) = U_4(u_4) = 0$ , obtenemos

$$U_3(k) = \frac{U_3(u_2)w_{134} - U_3(u_1)w_{234}}{a(s)w[u_1, u_2, u_3, u_4](s)} \quad \text{y} \quad U_4(k) = \frac{U_4(u_2)w_{134} - U_4(u_1)w_{234}}{a(s)w[u_1, u_2, u_3, u_4](s)}. \quad (5.5)$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & U_1(u_3) & U_1(u_4) \\ 0 & 0 & U_2(u_3) & U_2(u_4) \\ U_3(u_1) & U_3(u_2) & 0 & 0 \\ U_4(u_1) & U_4(u_2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(s) \\ c_2(s) \\ c_3(s) \\ c_4(s) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_3(k) \\ U_4(k) \end{pmatrix}.$$



obtenemos que  $c_3(s) = 0$ ,  $c_4(s) = 0$ , así como que

$$c_1(s) = \frac{1}{a(s)w[u_1, u_2, u_3, u_4](s)} \left( U_1(u_3)U_2(u_4) \left( U_3(u_2)U_4(k) - U_4(u_2)U_3(k) \right) \right. \\ \left. + U_2(u_3)U_1(u_4) \left( U_4(u_2)U_3(k) - U_3(u_2)U_4(k) \right) \right),$$

$$c_2(s) = \frac{1}{a(s)w[u_1, u_2, u_3, u_4](s)} \left( U_1(u_3)U_2(u_4) \left( U_4(u_1)U_3(k) - U_3(u_1)U_4(k) \right) \right. \\ \left. + U_2(u_3)U_1(u_4) \left( U_3(u_1)U_4(k) - U_4(u_1)U_3(k) \right) \right).$$

Si sustituímos  $U_3(k)$  y  $U_4(k)$  por las expresiones halladas en (5.5) y simplificamos, podemos expresar  $c_1(s)$  y  $c_2(s)$  como

$$c_1(s) = \frac{w_{234}(s)}{a(s)w[u_1, u_2, u_3, u_4](s)}, \quad y \quad c_2(s) = \frac{-w_{134}(s)}{a(s)w[u_1, u_2, u_3, u_4](s)}. \quad (5.6)$$

Por lo tanto,  $G(x, s)$  puede expresarse como

$$G(x, s) = k(x, s) + \frac{w_{234}(s)}{a(s)w[u_1, u_2, u_3, u_4](s)} u_1(x) - \frac{w_{134}(s)}{a(s)w[u_1, u_2, u_3, u_4](s)} u_2(x),$$

o lo que es lo mismo, como

$$G(x, s) = \frac{1}{a(s)w[u_1, u_2, u_3, u_4](s)} \begin{cases} u_1(x)w_{234}(s) - u_2(x)w_{134}(s), & \text{si } x \leq s, \\ -u_3(x)w_{412}(s) + u_4(x)w_{312}(s), & \text{si } x \geq s. \end{cases} \quad (5.7)$$

De esta forma, hemos hallado una expresión de la función de Green para cualquier problema de contorno de cuarto orden con condiciones separadas, expresada en función de la base  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$  formada por las cuatro soluciones de los cuatro PVI's expuestos al inicio del apartado.

## 5.6. Aplicaciones: flexiones transversales en vigas

### 5.6.1. Ecuación Diferencial

Considerando la información contenida en [11], podemos modelar el comportamiento de una viga sometida a una carga transversal mediante un problema de contorno de cuarto orden unidimensional. Que sea unidimensional requiere por un lado que la longitud de la viga  $l$  sea mucho mayor que la sección transversal. Además, sólo trataremos con desplazamientos a lo largo del eje  $y$ , por lo que los esfuerzos que apliquemos también serán en esa dirección, y sólo trataremos con flexión pura, es decir, en sólo una dirección que en nuestro caso será en el eje  $z$  (ver figura (5.1)).

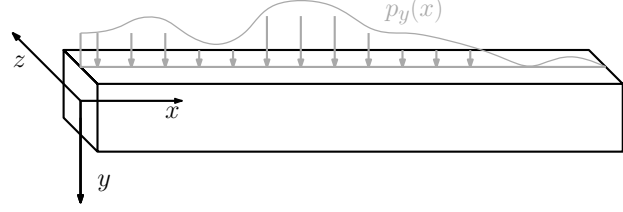


Gracias a las ecuaciones del equilibrio planteadas sobre una rebanada diferencial de nuestra viga obtenemos tres relaciones fundamentales:

$$\frac{\delta N}{\delta x} + p_x = 0 \quad (5.8)$$

$$\frac{\delta V_y}{dx} + p_y = 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{\delta M_z}{dx} + V_y = 0 \quad (5.10)$$



**Figura 5.1:** Sistema de referencia y dirección de carga escogidos.

donde  $M_z$  es el momento flector en el eje  $z$ ,  $p_x$  y  $p_y$  es la fuerza distribuida aplicada sobre el diferencial de viga en direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente,  $N$  es el axil y  $V_y$  el cortante en el eje  $y$ . Si consideramos (5.9) y (5.10) obtenemos la ecuación:

$$\frac{\delta^2 M_z}{\delta x^2} = p_y(x). \quad (5.11)$$

Por otro lado, asumiremos la hipótesis de Navier-Bernouilli sobre deformación por flexión pura [12]. Ésta afirma que el plano de la sección, que permanece constante después de la deformación, pasa por el centro de curvatura de la deformada de la directriz. Entonces, de la resistencia de materiales tenemos que  $\chi_z = \frac{M_z}{I_z E}$ , donde  $E$  es el módulo de Young del material,  $I_z$  es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje  $z$  y  $\chi_z$  es la curvatura de la deformada. Si asumimos pequeñas deformaciones no sólo estaremos dentro de la zona elástica del material sino que también podremos asumir que la curvatura, que es la derivada del giro, es precisamente la segunda derivada del desplazamiento transversal [13], esto es:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{M_z}{I_z E}. \quad (5.12)$$

Si unimos (5.11) y (5.12) obtendremos la ecuación característica

$$(EI_z u''(x))'' = p_y(x),$$

que modela el desplazamiento transversal de una viga ante una carga del mismo tipo. Asumiremos que la sección es homogénea y el material es isótropo por lo que, simplificando la notación con  $I_z = I$  y  $p = p_y$ , obtenemos

$$EI u^{iv}(x) = p(x).$$

Si ahora queremos añadir la influencia de una fuerza axil  $N$  constante a lo largo de la viga, tendremos que introducir un término más a la ecuación. Tomando  $N > 0$  si sometemos a la viga a tracción, y  $N < 0$  si la sometemos a compresión, éste estará

dado por  $-N \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}$ . Esto se debe a que, como estamos bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos, hacer el producto de  $N$  por la primera derivada del desplazamiento transversal es equivalente a hallar la componente de  $N$  en la dirección al desplazamiento. Considerando (5.9), al volver a derivar conseguimos expresar este cortante como una fuerza distribuida. El signo es debido a que tomaremos  $N$  como positivo cuando la viga esté sometida a tracción.

Por otro lado, también podemos modelar una viga que repose sobre un soporte elástico, de manera que éste produzca una fuerza en reacción a la propia deformación de la viga. Dicha fuerza será, por tanto, de la forma  $ku$ , es decir, proporcional a deformación transversal.

Sumando ambas aportaciones obtenemos la ecuación diferencial de cuarto orden autoadjunta que aplicaremos a continuación:

$$EIu^{iv}(x) - Nu''(x) + ku(x) = p(x).$$

Recordemos que el desplazamiento está definido de acuerdo con los ejes presentados en la figura (5.1). Por lo tanto, que éste sea positivo quiere decir que el desplazamiento es hacia abajo.

### 5.6.2. Condiciones de Contorno

Para plantear el problema de forma correcta, primero hemos de imponer cuatro condiciones de contorno linealmente independientes. Podemos expresar todas las CC consideradas mediante la generalización

$$\begin{aligned} U_1(u) &= \alpha_1 u(0) + \beta_1 [(au'')'(0) - b(0)u'(0)], & U_2(u) &= \gamma_1 u'(0) + \delta_1 u''(0), \\ U_3(u) &= \alpha_2 u(l) + \beta_2 [(au'')'(l) - b(l)u'(l)], & U_4(u) &= \gamma_2 u'(l) + \delta_2 u''(l), \end{aligned}$$

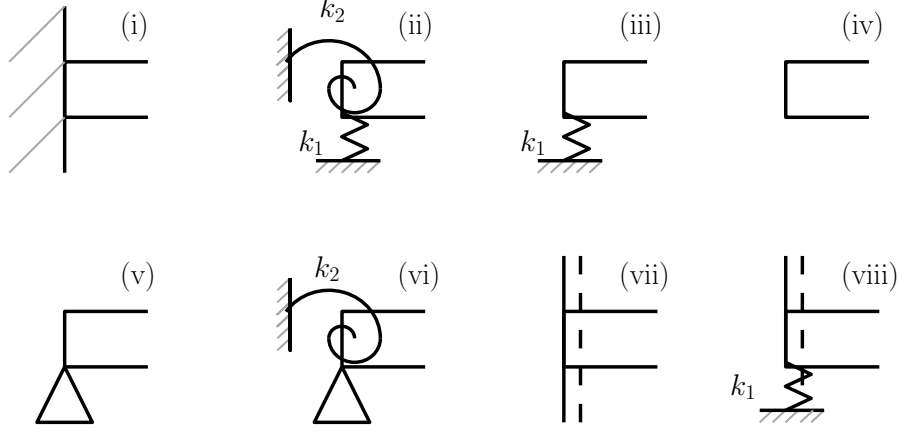
donde  $(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\gamma_1^2 + \delta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)(\gamma_2^2 + \delta_2^2) > 0$ .

Nos convendrá saber que la primera derivada de  $u$  representará el giro, mientras que la segunda será una función del momento flector, como podemos observar en (5.12). Considerando (5.10) y (5.12) obtenemos que la tercera derivada es una función del cortante tal que

$$EI \frac{\delta^3 u}{dx^3} = V_y.$$

Teniendo esto en cuenta, podemos plantear diferentes apoyos, representados en la figura (5.2), dependiendo de los valores que adopten  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  y  $\delta_2$ . A continuación expondremos las distintas posibilidades que este tipo de condiciones de contorno nos ofrecen. Para simplificar, teniendo en cuenta que estamos tratando con condiciones de contorno separadas, consideraremos sólo uno de los apoyos. Hemos elegido el izquierdo, por lo que sólo daremos las condiciones  $U_1$  y  $U_2$ . De esta forma, para plantear el

problema completo sólo tendremos que combinar las posibilidades siguientes, siempre teniendo en cuenta que debido a los ejes escogidos tendremos que cambiar el signo de  $\beta_1$  y  $\delta_1$  para expresar la misma condición de contorno en el lado opuesto [14].



**Figura 5.2:** Tipos de apoyo en función de las condiciones de contorno.

- (i) Si  $\alpha_1 = \gamma_1 = 1$  y  $\beta_1 = \delta_1 = 0$ , entonces impondremos las condiciones de Dirichlet

$$U_1(u) = u(0) = 0 \quad \text{y} \quad U_2(u) = u'(0) = 0.$$

De esta forma estaremos imponiendo que tanto el desplazamiento como el giro sean nulos, por lo que la viga estará empotrada.

- (ii) Si  $\alpha_1 = k_1$ ,  $\gamma_1 = k_2$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\delta_1 = -EI$ ,  $a(0) = EI$  y  $b(0) = N$ , entonces impondremos las condiciones de Robin

$$U_1(u) = k_1 u(0) - N u'(0) + EI u'''(0) = 0 \quad \text{y} \quad U_2(u) = k_2 u'(0) - EI u''(0) = 0.$$

De esta forma tendremos una viga sujeta por un muelle vertical de constante  $k_1$ , y uno en espiral  $k_2$  que responde proporcionalmente al giro. Es por ello que las dos condiciones de contorno que imponemos son simplemente las ecuaciones de equilibrio de dichos muelles. En el caso de  $k_1$  afirmamos que la reacción del muelle es igual al cortante, mientras que la condición  $U_2$  impone que el muelle ejerza un momento igual al del extremo de la viga.

- (iii) Si  $\alpha_1 = k_1$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\gamma_1 = 0$ ,  $\delta_1 = -EI$ ,  $a(0) = EI$  y  $b(0) = N$ , entonces impondremos las condiciones

$$U_1(u) = k_1 u(0) - N u'(0) + EI u'''(0) = 0 \quad \text{y} \quad U_2(u) = -EI u''(0) = 0,$$

de forma que la viga estará sujeta a uno de los extremos por un muelle de constante  $k_1$ .

- (iv) Si  $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ ,  $\delta_1 = -EI$ ,  $a(0) = EI$  y  $b(0) = N$ , entonces impondremos las condiciones de Neumann

$$U_1(u) = E I u'''(0) - N u'(0) = 0 \quad \text{y} \quad U_2(u) = -E I u''(0) = 0,$$

de forma que la barra estará libre en uno de los extremos.

- (v) Si  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_1 = \gamma_1 = 0$  y  $\delta_1 = -EI$ , entonces impondremos las condiciones

$$U_1(u) = u(0) = 0, \quad U_2(u) = -E I u''(0) = 0,$$

de forma que la barra estará simplemente apoyada.

- (vi) Si  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\delta_1 = -EI$  y  $\gamma_1 = k_2$ , entonces impondremos las condiciones

$$U_1(u) = u(0) = 0 \quad \text{y} \quad U_2(u) = k_2 u'(0) - E I u''(0),$$

de forma que la viga estará simplemente apoyada pero sujeta por el muelle de constante  $k_2$  que responderá a los momentos en dicho extremo.

- (vii) Si  $\alpha_1 = \delta_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = \beta_1 = 1$ ,  $a(0) = EI$  y  $b(0) = N$ , entonces impondremos las condiciones

$$U_1(u) = E I u'''(0) - N u'(0) = 0 \quad \text{y} \quad U_2(u) = u'(0) = 0.$$

De esta forma la viga estará dentro de un raíl que impedirá su giro dejándole libertad para desplazarse transversalmente.

- (viii) Si  $\alpha_1 = k_1$ ,  $\gamma_1 = \beta_1 = 1$ ,  $\delta_1 = 0$ ,  $a(0) = EI$  y  $b(0) = N$ , entonces impondremos las condiciones

$$U_1(u) = k_1 u(0) - N u'(0) + E I u'''(0) = 0 \quad \text{y} \quad U_2(u) = u'(0) = 0.$$

De esta forma la viga estará dentro de un raíl que impedirá su giro pero dejará que el desplazamiento transversal sea limitado por el muelle de constante  $k_1$ .

### 5.6.3. Resolución del problema con condiciones separadas

#### Viga sometida únicamente a esfuerzos transversales

Para empezar, asumiremos que nuestra viga sólo está sometida a esfuerzos transversales, es decir, a esfuerzos en dirección al eje  $y$ . En este caso, la EDO que modelará nuestro sistema estará dada por

$$L(u) = E I u^{iv}(x) = p(x),$$

donde  $p \in \mathcal{C}([0, l])$ , siendo  $l$  la longitud de la viga, y  $E I > 0$  constante. Estaremos, por tanto, asumiendo que  $N = k = 0$ .

Consideraremos las tres condiciones de contorno más usuales, esto es:



- (i) Si  $\beta_1 = \beta_2 = \delta_1 = \delta_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$ , obtenemos

$$U_1(u) = u(0), \quad U_2(u) = u'(0), \quad U_3(u) = u(l), \quad \text{y} \quad U_4(u) = u'(l),$$

por lo que estaremos considerando una viga biempotrada.

- (ii) Si  $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\delta_1 = -EI$ ,  $\delta_2 = EI$ , obtenemos

$$U_1(u) = u(0), \quad U_2(u) = -EIu''(0), \quad U_3(u) = u(l), \quad \text{y} \quad U_4(u) = EIu''(l),$$

por lo que estaremos considerando una viga biapoyada.

- (iii) Si  $\alpha_1 = \beta_2 = \delta_2 = \gamma_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \gamma_2 = \beta_1 = 1$ ,  $\delta_1 = -EI$ , obtenemos

$$U_1(u) = EIu'''(0), \quad U_2(u) = -EIu'(0), \quad U_3(u) = u(l), \quad \text{y} \quad U_4(u) = u'(l),$$

por lo que estaremos considerando una libre en un extremo y empotrada en el otro.

Teniendo en cuenta lo expuesto en el apartado **5.3**, podemos afirmar que en todos los casos se tratará de un problema regular, por lo que en esta ocasión no volveremos a demostrarlo. Cabe mencionar que las condiciones de contorno bajo las cuales perdemos la unicidad de soluciones son, en este caso, físicamente muy intuitivas. Por ejemplo la perderíamos si  $k_1 = k_2 = k_4 = 0$ . Tomando  $k_3 \rightarrow \infty$ , estas condiciones de contorno representarían un extremo libre a un lado y un apoyo simple al otro, lo cual ante una carga transversal no se sostiene. Si, en cambio,  $k_4$  deja de valer cero, podemos considerar por ejemplo  $k_4 \rightarrow \infty$ , entonces estaríamos ante un empotramiento en el segundo extremo (caso **(iii)**), por lo que el sistema recuperaría la unidad de soluciones y la viga se mantendría en su lugar.

Es por ello que podemos afirmar que la única solución a los tres problemas estará dada por  $\int_0^l G(x, s)p(s)ds$ , donde, si elegimos las bases correctas,  $G(x, s)$  puede expresarse como

$$G(x, s) = \frac{1}{a(s)w[u_1, u_2, u_3, u_4](s)} \begin{cases} u_1(x)w_{234}(s) - u_2(x)w_{134}(s), & \text{si } x \leq s, \\ -u_3(x)w_{412}(s) + u_4(x)w_{312}(s), & \text{si } x \geq s. \end{cases} \quad (5.13)$$

Cada uno de los problemas propuestos requerirá una base de soluciones distinta.

- (i) En el primer caso, consideraremos  $u_1$  como la única solución al PVI

$$L(u) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u'''(0) = 1.$$

Dado que  $N = k = 0$ , considerando el apartado **2.5.2**, sabemos que una base de soluciones a la EDO homogénea estará dada por  $\{1, x, x^2, x^3\}$ . De esta forma, mediante un sistema de ecuaciones podemos expresar  $u_1(x)$  como  $u_1(x) = \frac{1}{6}x^3$ .

Por otro lado,  $u_2$  será la única solución al PVI dado por

$$L(u) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = 1, \quad u'''(0) = 0,$$

es decir,  $u_2(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

$u_3$  será la única solución al PVI dado por

$$L(u) = 0, u(l) = 0, u'(l) = 0, u''(l) = 0, u'''(l) = 1,$$

esto es,

$$u_3(x) = -\frac{1}{6}l^3 + \frac{1}{2}l^2x - \frac{1}{2}lx^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Finalmente  $u_4$  estará dada por la única solución a

$$L(u) = 0, u(l) = 0, u'(l) = 0, u''(l) = 1, u'''(l) = 0,$$

es decir, por

$$u_4(x) = \frac{1}{2}l^2 - xl + \frac{1}{2}x^2.$$

(ii) En el segundo caso, denotaremos por  $u_1$  a la única solución al PVI

$$L(u) = 0, u(0) = 0, u'(0) = 0, u''(0) = 0, u'''(0) = 1,$$

que por tanto estará dada por  $u_1(x) = \frac{1}{6}x^3$ .

Por otro lado,  $u_2$  será la única solución de

$$L(u) = 0, u(0) = 0, u'(0) = EI, u''(0) = 0, u'''(0) = 0,$$

es decir, la dada por  $u_2(x) = EIx$ .

$u_3$  será la única solución al PVI dado por

$$L(u) = 0, u(l) = 0, u'(l) = 0, u''(l) = 0, u'''(l) = 1,$$

esto es,

$$u_3(x) = -\frac{1}{6}l^3 + \frac{1}{2}l^2x - \frac{1}{2}lx^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Finalmente, denotaremos por  $u_4$  a la solución de

$$L(u) = 0, u(l) = 0, u'(l) = EI, u''(l) = 0, u'''(l) = 0,$$

dada por  $u_4(x) = EIl - EIx$ .

(iii) Por último consideraremos  $u_1$  como la única solución al PVI

$$L(u) = 0, u(0) = -EI, u'(0) = 0, u''(0) = 0, u'''(0) = 0;$$

$u_2$  como la única solución de

$$L(u) = 0, u(0) = 0, u'(0) = EI, u''(0) = 0, u'''(0) = 0;$$

$u_3$  como la única solución al PVI dado por

$$L(u) = 0, u(l) = 0, u'(l) = 0, u''(l) = 0, u'''(l) = 1$$

y  $u_4$  como la de

$$L(u) = 0, u(l) = 0, u'(l) = 0, u''(l) = 1, u'''(l) = 0.$$

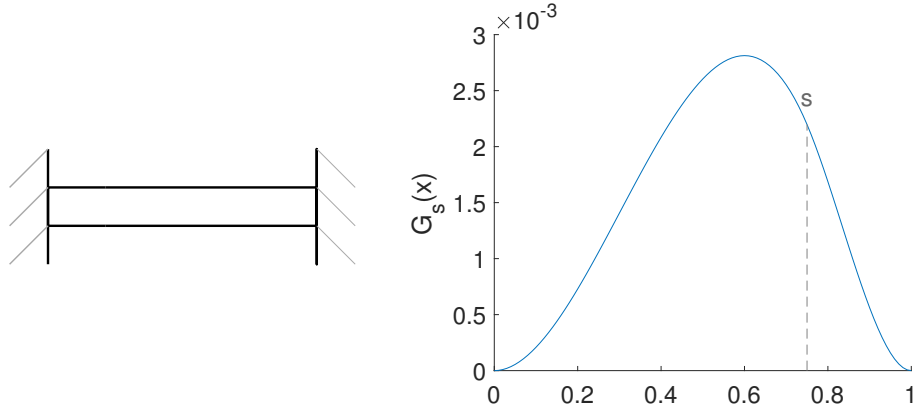
De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -EI, & u_2(x) &= EIx, \\ u_3(x) &= -\frac{1}{6}l^3 + \frac{1}{2}l^2x - \frac{1}{2}lx^2 + \frac{1}{6}x^3 & \text{y} & \quad u_4(x) = \frac{1}{2}l^2 - xl + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Introduciendo las bases halladas en (5.13) obtenemos la función de Green correspondiente a cada uno de los problemas de contorno. En cada caso se expresa de la siguiente forma:

(i)

$$G(x, s) = \frac{1}{6EI l^3} \begin{cases} x^2(l-s)^2((3s-x)l-2sx), & \text{si } x \leq s, \\ s^2(l-x)^2((3x-s)l-2sx), & \text{si } x \geq s. \end{cases}$$

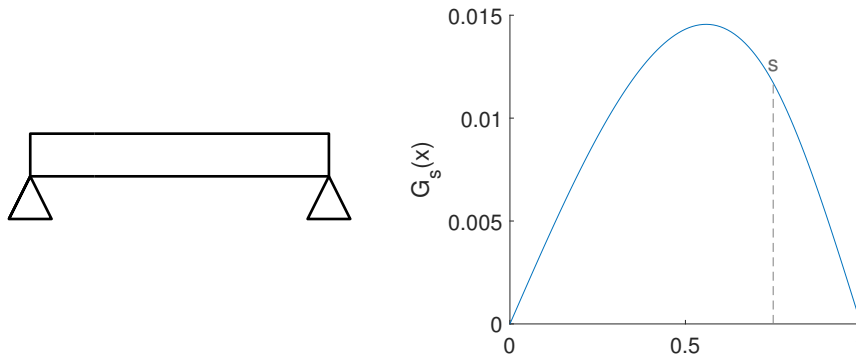


**Figura 5.3:** Izquierda: Viga biempotrada. Derecha: Respuesta ante una acción concentrada en  $s$ .

(ii)

$$G(x, s) = \frac{1}{6EI l} \begin{cases} x(l-s)(2ls-s^2-x^2), & \text{si } x \leq s, \\ s(l-x)(2lx-x^2-s^2), & \text{si } x \geq s. \end{cases}$$

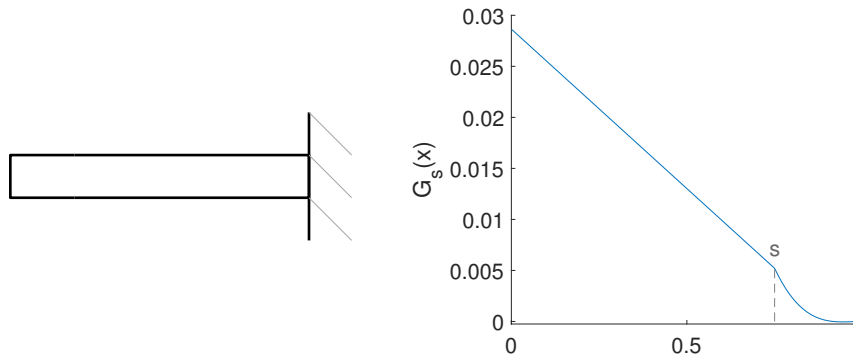




**Figura 5.4:** Izquierda: Viga biapoyada. Derecha: Respuesta ante una acción concentrada en  $s$ .

(iii)

$$G(x, s) = \frac{1}{6EI} \begin{cases} (l-s)^2(2l-3x+s), & \text{si } x \leq s, \\ (l-x)^2(2l-3s+x), & \text{si } x \geq s. \end{cases}$$



**Figura 5.5:** Izquierda: Viga en voladizo. Derecha: Respuesta ante una acción concentrada en  $s$ .

Debemos decir que a la hora de realizar las figuras (5.3), (5.4) y (5.5), que representan la función de Green en cada caso, hemos tomado los valores de  $s = \frac{3}{4}$  y  $EI = l = 1$ . Como es evidente, éstos no son valores reales.

Por lo tanto, si aplicamos una carga distribuida a lo largo de la viga, la única solución al problema estará dada por  $\int_0^l G(x, s)p(s)ds$ , donde  $p(s)$  representa dicha carga.

### Viga sometida a esfuerzos transversales y a un axil a compresión constante

En este caso, la EDO que modelará nuestro sistema estará dada por

$$L(u) = EIu^{iv}(x) - Nu''(x) = p(x),$$

donde  $p \in \mathcal{C}([0, l])$ , siendo  $l$  la longitud de la viga,  $EI > 0$  y  $N < 0$ .

Únicamente consideraremos dos condiciones de contorno, una que hará que obtengamos una viga biapoyada, y otra, biempotrada.

(i) Viga biapoyada

$$U_1(u) = u(0), \quad U_2(u) = u''(0), \quad U_3(u) = u(l), \quad \text{y} \quad U_4(u) = u''(l).$$

(ii) Viga biempotrada

$$U_1(u) = u(0), \quad U_2(u) = u'(0), \quad U_3(u) = u(l), \quad \text{y} \quad U_4(u) = u'(l).$$

En esta ocasión no consideraremos el caso del voladizo ya que al tener un axil, éste deja de tener tanto interés práctico.

Dado que  $N < 0$ , ahora las condiciones para las cuales tendremos unicidad de soluciones serán más estrictas. En el apartado **5.3** hemos conseguido acotar los valores de  $N$  para los cuales sabemos seguro que el problema será regular. Sin embargo, dado que hemos obtenido las cotas a través de desigualdades de energía, éstas no son las mejores posibles. Es por ello que para conocer con exactitud los valores que podrá tomar  $N$  deberemos resolver el problema homogéneo. Aprovecharemos esto para resolver el problema de manera distinta a como lo hicimos en el problema sin axil.

En esta ocasión construiremos la función de Green desde cero. Primero hallaremos una base de soluciones a la EDO homogénea, con la que no sólo determinaremos las soluciones al [PH], sino que también nos servirá para construir la función de Green del [PC]. Ésta última también requerirá que utilicemos la función de Green del PVI expuesta en el apartado **2.5.2**. De esta forma, la función que hallemos dependerá de cuatro coeficientes que definiremos imponiendo las cuatro condiciones de contorno.

Considerando el apartado **2.5.2**, sabemos que una base de soluciones a la EDO homogénea estará dada por  $\{1, x, \cos(\nu x), \sin(\nu x)\}$ , donde  $\nu = \sqrt{\frac{|N|}{EI}}$ .

En ambos casos, la única solución al [PH] se encontrará entre las funciones definidas por  $u(x) = A + Bx + C \cos(\nu x) + D \sin(\nu x)$ . Para una viga biapoyada además tendrá que cumplir  $u(0) = u''(0) = u(l) = u''(l) = 0$ , mientras que para una biempotrada, las CC serán  $u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0$ .

Imponiendo estas condiciones de contorno obtenemos, en el primero de los casos,  $A = C = 0$  y  $B, D$  estarán determinadas por el sistema de la izquierda de (5.14);

mientras que para el segundo  $A = -C$ ,  $B = -\nu D$  y  $C, D$  estarán determinadas por el sistema de la derecha siguiente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} l & \text{sen}(\nu l) \\ 0 & \text{sen}(\nu l) \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\nu l) - 1 & \text{sen}(\nu l) - \nu l \\ -\text{sen}(\nu l) & \cos(\nu l) - 1 \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Podemos ver que en cada caso el problema homogéneo tendrá como única solución la trivial sii  $M$  y  $P$  son invertibles, o lo que es lo mismo, sii el sistema tiene como única solución  $A = B = C = D = 0$ .

Por lo tanto, cuando  $\det M = l \text{sen}(\nu l) = 0$ , esto es, cuando  $\text{sen}(\nu l) = 0$ , el problema de la viga biapoyada dejará de ser regular. Por otro lado, cuando  $\det P = -2(\cos(\nu l) - 1) + \nu l \text{sen}(\nu l) = 0$  será el problema de la viga biempotrada el que pierda la unicidad de soluciones. Si estas condiciones se cumplieran tendríamos, o bien que  $B = 0$  mientras que  $D$  quedaría libre, o bien que  $D = 0$  mientras que  $C$  quedaría libre; es decir, el [PH] tendría infinitas soluciones.

Para que esto suceda, en ambos casos se deberá de cumplir que  $\nu l = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , o lo que es lo mismo, que  $\nu^2 = \frac{|N|}{EI} = \frac{k^2\pi^2}{l^2}$ . Despejando  $N$  y considerando que es negativa obtenemos  $N = -\frac{EI k^2 \pi^2}{l^2}$  con  $k \in \mathbb{N}^*$ . Tomando el más pequeño de estos valores, esto es, el correspondiente a  $k = 1$ , hallamos la expresión

$$N = -\frac{EI\pi^2}{l^2},$$

que representa precisamente la *carga crítica de Euler* o *fuerza crítica*. Físicamente, dicha carga nos da una cota inferior a  $N$  que no deberemos sobrepasar si queremos evitar que nuestra viga se rompa. Si la sobrepasamos estaremos en una situación de inestabilidad elástica que se romperá a nada que tengamos una mínima carga transversal.

Matemáticamente, un axil de este tipo implica que existen soluciones en equilibrio no triviales, es decir, cuando  $N = -\frac{EI k^2 \pi^2}{l^2}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , pueden surgir flexiones sin necesidad de carga transversal, esto es, sin introducir energía adicional al sistema. Además, gracias al Teorema de Alternativa, sabemos que para que exista alguna solución, la carga  $p(s)$  tendrá que cumplir

$$\int_0^l \text{sen}(\nu s) p(s) ds = 0. \quad (5.15)$$

Suponiendo que  $p(s)$  sea constante, esta expresión ilustrará lo ya comentado en el párrafo anterior: la más mínima carga transversal hará que el problema no tenga solución y que la viga se rompa. Sin embargo, si tenemos una  $p(s)$  que cumple (5.15), el problema tendrá infinitas soluciones que posiblemente resulte en una bifurcación de las mismas.

Como no nos interesará resolver un problema no regular, pues su interpretación física no sólo es difusa, sino también inestable, a partir de ahora consideraremos que  $N$  cumple  $\text{sen}(\nu l) \neq 0$ , de forma que nos aseguraremos de que nuestro problema es regular.



A continuación construiremos la función de Green del [PC] como  $G(x, s) = A + Bx + C \cos(\nu x) + D \sin(\nu x) + k(x, s)$ , donde  $k(x, s)$  es la función de Green Unilateral que en el caso que nos ocupa estará dada por

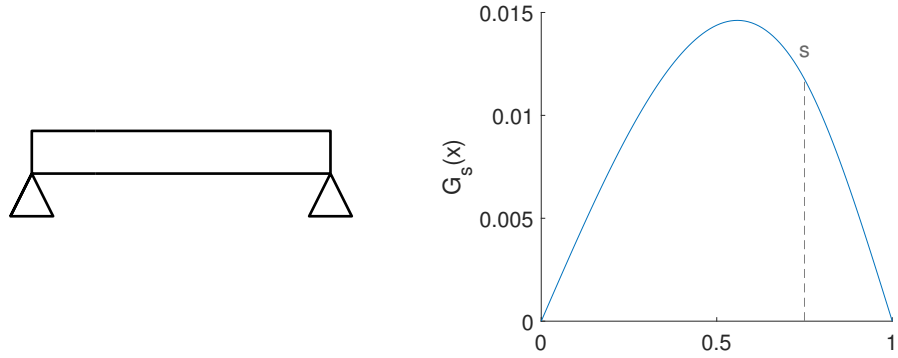
$$k(x, s) = \frac{1}{EI\nu^3} \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq s, \\ \sin(\nu(x-s)) - \nu(x-s), & \text{si } x \geq s. \end{cases}$$

Para hallar esta función hemos tenido que dividir la expresión hallada en el apartado 2.5.2 entre  $EI$ , dado que nuestra EDO ya no es explícita.

Imponiendo las condiciones de contorno obtendremos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas cuyos resultados serán los siguientes en cada caso:

- (i) Si la viga está biapoyada tendremos  $A = C = 0$ ,  $B = -\nu(l-s)\sin(\nu l)$  y  $D = l\sin(\nu(l-s))$ . Tras simplificar un poco para el caso en el que  $x \geq s$ , obtenemos que la función de Green estará dada por

$$G(x, s) = \frac{1}{EI\nu^3 \sin(\nu l)} \begin{cases} l\sin(\nu(l-s))\sin(\nu x) - \nu(l-s)\sin(\nu l)x, & \text{si } x \leq s, \\ l\sin(\nu(l-x))\sin(\nu s) - \nu(l-x)\sin(\nu l)s, & \text{si } x \geq s. \end{cases}$$



**Figura 5.6:** Izquierda: Viga biapoyada. Derecha: Respuesta ante una acción transversal concentrada en  $s$  con la viga sometida a un axil  $N$ .

- (ii) Si la viga está biempotrada obtendremos

$$\begin{aligned} A &= -C, & B &= -\nu D, \\ C &= \frac{\nu l \cos(\nu(l-s)) - \nu(l-s) \cos(\nu l) - \sin(\nu s) + \sin(\nu l) - \sin(\nu(l-s)) - \nu s}{EI\nu^3(-2(\cos(\nu l) - 1) + \nu l \sin(\nu l))}, \\ D &= \frac{\cos(\nu s) - \cos(\nu l) - \cos(\nu(l-s)) + 1 - \nu(l-s) \sin(\nu l)}{EI\nu^3(-2(\cos(\nu l) - 1) + \nu l \sin(\nu l))}. \end{aligned}$$

Tras simplificar para el caso en el que  $x \geq s$ , obtenemos que la función de Green estará dada por

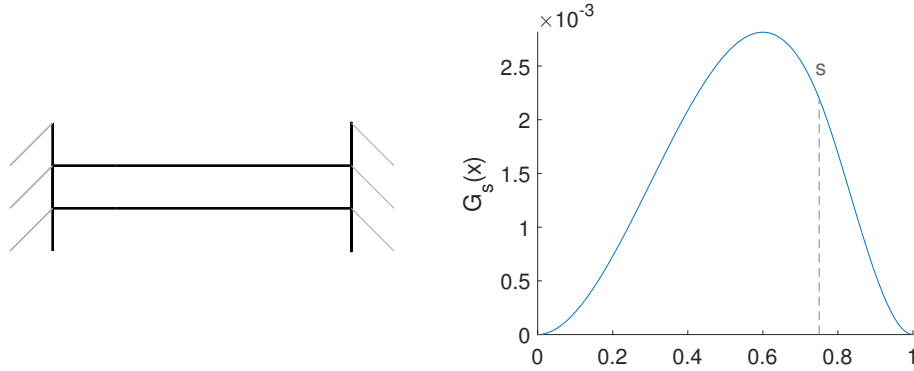
$$G(x, s) = \frac{1}{EI\nu^3 \det P} \begin{cases} -C(s) - \nu D(s)x + C(s) \cos(\nu x) + D(s) \sin(\nu x), & \text{si } x \leq s, \\ -C(x) - \nu D(x)s + C(x) \cos(\nu s) + D(x) \sin(\nu s), & \text{si } x \geq s, \end{cases}$$

donde

$$C(s) = \frac{\nu l \cos(\nu(l-s)) - \nu(l-s) \cos(\nu l) - \sin(\nu s) + \sin(\nu l) - \sin(\nu(l-s)) - \nu s}{EI\nu^3(-2(\cos(\nu l) - 1) + \nu l \sin(\nu l))},$$

$$D(s) = \frac{\cos(\nu s) - \cos(\nu l) - \cos(\nu(l-s)) + 1 - \nu(l-s) \sin(\nu l)}{EI\nu^3(-2(\cos(\nu l) - 1) + \nu l \sin(\nu l))}$$

$$\text{y } \det P = -2(\cos(\nu l) - 1) + \nu l \sin(\nu l).$$



**Figura 5.7:** Izquierda: Viga biempotrada. Derecha: Respuesta ante una acción transversal concentrada en  $s$  con la viga sometida a un axil  $N$ .

Recordemos que hemos tomado  $\nu = \sqrt{\frac{|N|}{EI}}$ . Además, para realizar las figuras (5.7) y (5.6), que representan la función de Green en cada caso, hemos considerado  $EI = l = 1$ ,  $s = \frac{3}{4}$  y  $N = 1/25$ .

Por lo tanto, si aplicamos una carga distribuida a lo largo de la viga, la única solución al problema estará dada por  $\int_0^l G(x, s)p(s)ds$ , donde  $p(s)$  representa dicha carga.

Como podemos observar, en ambos casos la función de Green es simétrica. Esto sucede si el problema planteado es autoadjunto. De hecho, la razón por la cual al introducir un axil hemos dejado de considerar las condiciones de contorno que modelan una viga en voladizo, no sólo es que en la práctica tenga menos aplicaciones. Además, el problema deja de ser autoadjunto, pues podemos comprobar que las condiciones  $u(0) = 0, u''(0) = 0, u(l) = 0, u''(l) = 0$  ya no satisfacen la igualdad  $\int_0^l L(u)v = \int_0^l L(v)u$ .

Esto es debido a que al plantear el equilibrio en un voladizo sometido a un axil constante, se requiere una fuerza adicional que actúe en el extremo libre, esto es, una que no está siendo generada por el sistema -ni su contorno- y que sin embargo tenemos que considerar. En consecuencia, la función de Green deja de ser simétrica y la ley de reciprocidad ya no se cumple.

#### 5.6.4. Tratamiento variacional

Dado que los problemas tratados son autoadjuntos, siempre podremos expresarlos mediante una bilineal simétrica y tratarlos de forma variacional.

De modo análogo a como procedimos en segundo orden, nuestro problema será equivalente a

$$\begin{aligned} b(u, v) = \int_0^l (EIu''v'' + Nu'v' + kuv) + k_1u(0)v(0) + k_2u'(0)v'(0) \\ + k_3u(l)v(l) + k_4u'(l)v'(l) = \int_0^l pv = l(v), \end{aligned} \quad (5.16)$$

donde  $v \in \mathcal{C}^4([0, l])$  cumple las CC homogéneas,  $b(u, v)$  es una aplicación bilineal simétrica y  $l(v)$  denota una aplicación lineal.

Resolver la igualdad anterior resulta ser equivalente a hallar el mínimo del funcional de energía dado por

$$\begin{aligned} \min\{q(u) - 2l(u)\} = \min\left\{ \int_0^l (EI(u'')^2 + N(u')^2 + ku^2) + k_1u(0)^2 + k_2u'(0)^2 \right. \\ \left. + k_3u(l)^2 + k_4u'(l)^2 - 2 \int_0^l p(x)u(x)dx \right\}, \end{aligned}$$

donde  $q(u)$  es la forma cuadrática de  $b(u, v)$ .

Teniendo en cuenta que  $u$  es el desplazamiento de la barra y, por tanto, la solución a nuestro problema, entonces el término  $\int_0^l EI(u'')^2$  se puede expresar como  $\int_0^l \frac{M_z^2}{EI}$ , y junto con  $\int_0^l N(u')^2 = \int_0^l V_y u'$ , representa la energía debida a la deformación por flexión. Además,  $\int_0^l ku^2$  da cuenta de la energía almacenada en el soporte elástico, mientras que  $k_1u(0)^2 + k_2u'(0)^2 + k_3u(l)^2 + k_4u'(l)^2$  lo hace de la almacenada en los muelles. Finalmente,  $2 \int_0^l pu$  representa el trabajo hecho por la fuerza  $p$  para conseguir un desplazamiento  $u$ .

De esta forma, podemos considerar la igualdad anterior como una expresión de la energía total del sistema. Si consideramos  $u$  como un desplazamiento virtual, nuestro problema será equivalente a encontrar, de entre todos los desplazamientos virtuales posibles, precisamente aquel que minimiza la energía total del sistema. Además, (5.16) precisamente afirma que si  $u = v$  es la solución a nuestro problema, entonces el trabajo virtual interno ha de ser igual al trabajo virtual externo y la energía se conservará.

Considerando el problema homogéneo y  $k = 0$ , tenemos que

$$\int_0^l EI(u'')^2 + N \int_0^l u'^2 = 0,$$

para todo  $u$  que satisfaga las condiciones de contorno. En el caso especial en el que  $N$  es tal que ocurren pandeos, tenemos infinitos desplazamientos  $u$  que minimizan la energía del sistema. Dado que no estamos aplicando ninguna carga, esto implica que el pandeo ocurre para aquellos axiles que igualan la energía de deformación por axil a la energía de deformación por flexión, independientemente del desplazamiento de la viga.





## Capítulo 6

# Análisis del impacto ambiental

Dado que se trata de un trabajo estrictamente teórico, de su realización no se deriva ningún impacto ambiental reseñable.



# Conclusiones

Este trabajo ha sido motivado por problemas de la Ingeniería Mecánica, cuyo análisis está basado en la resolución de problemas de contorno unidimensionales. En el transcurso del trabajo nos hemos encontrado con las ventajas e inconvenientes del tratamiento realizado.

El objetivo general de este trabajo ha sido crear un marco accesible para estudiantes de grado, de determinados problemas de ingeniería cuyo tratamiento y fundamento teóricos están prácticamente ausentes de la literatura básica. Esta característica es especialmente significativa en el caso del tratamiento de acciones concentradas, ligadas al concepto de función de Green, y del análisis de flexiones de vigas, que requiere profundizar en el estudio de problemas de contorno de cuarto orden. Mi formación técnica, adquirida en los estudios de grado, me ha permitido interpretar mecánicamente las diferentes condiciones de contorno, información que también está ausente en la mayor parte de las referencias básicas.

Como ha podido observarse a lo largo de la Memoria, los recursos matemáticos utilizados no requieran más instrumentos que los desarrollados en el Grado. Esto no significa que en algunos apartados no exista cierta sofisticación en el tratamiento matemático, pero el planteamiento seguido ha permitido evitar el uso de herramientas de alto nivel que quedan fuera del alcance de un estudiante de Grado, como por ejemplo la Teoría de Distribuciones o la Teoría de espacios de Hilbert.

Uno de los objetivos específicos de este trabajo ha sido el análisis de las acciones concentradas, tanto para problemas de valor inicial como de contorno, que matemáticamente están descritas por la denominada Función de Green. Por un lado, hemos expuesto la íntima relación entre los sistemas físicos y su función de Green, siendo ésta no sólo la respuesta ante una acción puntual, sino también única -siempre que el problema sea regular- e independiente a las acciones externas.

Por tanto, la función de Green integra toda la información del sistema físico, contenida no sólo en el operador diferencial, sino también en las condiciones de contorno y establece una biyectividad entre el sistema y su respuesta. De hecho, hemos constatado que la función de Green de un problema autoadjunto será necesariamente simétrica. Esto constituye la característica distintiva de dichos problemas, que en el ámbito de las

estructuras se denomina la Ley de Reciprocidad de Betti-Maxwell. Esta propiedad de simetría de la función de Green, se puede extender a cualquier problema autoadjunto, lo que a grandes rasgos también podría interpretarse como la conservación de la energía en dichos sistemas.

Además, hemos probado que cuando el problema de contorno es autoadjunto, su solución está caracterizada como la que produce el mínimo del correspondiente funcional de energía, es decir, que el sistema se rige por el principio de mínima acción.

Hemos constatado que la resolución, sobre todo en problemas de cuarto orden, requiere mucho cálculo, aunque éste no sea excesivamente complejo. Esto nos ha impedido abordar la obtención de soluciones de problemas con condiciones de contorno más generales, pues sus expresiones resultaban demasiado intrincadas y no permitían una interpretación física sencilla. Del mismo modo, también se ha limitado la clase de EDO de cuarto orden que hemos resuelto. Por no extender esta memoria más allá de los límites razonables, hemos optado por eliminar problemas con un soporte elástico; es decir, hemos supuesto que el coeficiente de grado 0 de la EDO es siempre nulo.

Por otro lado, al resolver nuestro problema de cuarto orden con coeficientes constantes, hemos comprobado que las desigualdades de energía no nos garantizan las mejores cotas. Bien es cierto que debemos apuntar que este tipo de estudio se vuelve imprescindible cuando los coeficientes de la EDO son variables, caso de materiales inhomogéneos o secciones de vigas no uniformes, ya que en estos casos no puede aspirarse a resolver explícitamente la ecuación y por tanto no tenemos otra forma de garantizar la regularidad de nuestros problemas.

Finalmente, también debemos ser conscientes de los límites de nuestros modelos. Por ejemplo, al tratar una viga de manera unidimensional estamos despreciando el desplazamiento longitudinal. En principio, esto no supone gran problema. Sin embargo, a la hora de definir los valores del axil para los cuales se produce el pandeo, obtenemos que éstos son los mismos, ya tengamos una viga biempotrada o una biapoyada. La razón es que con nuestro modelo, cuando decimos que una viga está biempotrada, en realidad sólo estamos fijando el desplazamiento transversal y el giro, permitiendo así el desplazamiento longitudinal. Esto afecta a la carga crítica de viga, difiriendo la que hemos encontrado de la correspondiente a una viga biempotrada sin desplazamiento transversal. Asimismo, debemos destacar que problemas más avanzados requerirían otros modelos de vigas, como por ejemplo el de Timoshenko.

# Análisis económico

## 6.0.1. Costes de Ingeniería

Concepto		Horas	Precio/Hora	Precio parcial
Formación	Problemas de Valores Iniciales	115	25€/h	2.875€
	Problemas de Contorno de segundo orden	150	25€/h	3.750€
	Problemas de Contorno de cuarto orden	80	25€/h	2.000€
Investigación	Problemas de cuarto orden	120	30€/h	3.600€
Aplicación	Problemas de Contorno de segundo orden	40	35€/h	1.400€
	Problemas de Contorno de cuarto orden	80	35€/h	2.800€
Redacción de la memoria		120	30€/h	3.600€
Suma				20.025€
+10 % Costes indirectos: electricidad, espacio...				2.002'5€
Subtotal 1				22.027'5€

## 6.0.2. Licencias

Software	Precio
Maple	890€
Subtotal 2	890€

Subtotal 1	22.027'5€
Subtotal 2	890€
Precio Total	22.917'5€



# Bibliografía

- [1] Courant, R. y Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*, vol. I, John Wiley & Sons, 1953.
- [2] Brezis, H. *Análisis Funcional*, ed. Alianza Universidad, 1984.
- [3] Casas, E. *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*, Universidad de Cantabria, 1992.
- [4] Raviart, J.P. y Thomas, J.M. *Introduction a l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, ed. Masson, 1988.
- [5] Crouceix, M. y Mignot, A.L., *Exercices d'analyse numérique des équations différentielles*, ed. Masson, 1986.
- [6] Bendito, E., Carmona, A., Encinas, A.M. y Medina, A. *Curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, versión electrónica de apuntes de curso, 2005.
- [7] Haberman, R. *Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno*, Prentice Hall, 2000.
- [8] Marcellán, F., Casasús, L. y Zarzo, A. *Ecuaciones Diferenciales*, Grupo Editorial Iberoamericana, 1990.
- [9] Encinas, A.M. y J. Rodellar, *Curso de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas parciales*, versión electrónica de apuntes de curso, 2002.
- [10] Coddington, E.A. y Levinson, N., *Theory of Ordinary differential equations*, McGraw-Hill, 1955.
- [11] Cervera, M. y Blanco, E. *Resistencia de Materiales*, CIMNE, 2015.
- [12] Bauchau, O.A. y Craig, J.I. *Structural Analysis*, Springer, 2009.
- [13] Timoshenko, S. *Resistencia de Materiales*, Espasa-Calpe S.A., 1957.
- [14] Weaver, W.Jr., Timoshenko, S. y Young, D.H., *Vibrations Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, 1990.